

Szakdolgozat

Rendezetlen kvantum spinláncok kritikus viselkedésének vizsgálata

Kovács István

Témavezető: Iglói Ferenc, egyetemi tanár
MTA Szilárdtestfizikai és Optikai Kutatóintézet



Eötvös Loránd Tudományegyetem
2008

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
1.1. A termikus és a kvantum fázisátalakulások viszonya	7
1.2. Griffiths-McCoy szingularitások	9
2. A vizsgált rendezetlen kvantum spinláncok	12
2.1. Bevezetés	12
2.2. Rendezetlen szoros kötésű modell	12
2.3. Rendezetlen antiferromágneses XX-lánc	13
2.4. Rendezetlen transzverzális terű Ising-lánc	14
2.5. Összefoglalás - alacsony energiájú viselkedés	14
3. Az állapotsűrűség kiszámítása a spektrum közepén	15
3.1. Bevezetés és célkitűzések	15
3.2. A véletlen bolyongássá való leképezés	15
3.3. Vizsgálat a diffúziós egyenlet érvényességi tartományában	17
3.3.1. Kritikus pont	17
3.3.2. Gyengén rendezetlen Griffiths fázis	18
3.4. Vizsgálat az erősen rendezetlen Griffiths fázisban	18
3.5. Kapcsolat az erősen rendezetlen renormalizációs technikával	20
3.6. Összefoglalás	21
4. Termodinamikai szingularitások	22
4.1. Bevezetés és célkitűzések	22
4.2. Termodinamikai szingularitások a kapott egzakt állapotsűrűség alapján . .	22
4.3. Összefoglalás	24
5. Kapcsolat a Sinai modell és a transzverzális terű Ising lánc között	25
5.1. Bevezetés és célkitűzések	25
5.2. A Sinai bolyongás és a kapcsolódó eredmények	25
5.3. A paraméterek megfeleltetése a két modell között	27
5.4. Az Ising lánc állapotsűrűségének kiszámítása	27
5.4.1. Az állapotsűrűség normálásának kérdése	30
5.5. Termodinamikai mennyiségek számítása	30
5.6. Összefoglalás	32

6. Transzverzális terű Ising lánc vizsgálata numerikus renormalizációval	33
6.1. Bevezetés és célkitűzések	33
6.1.1. Konform térelméleti eredmények	35
6.2. Az alkalmazott renormalizációs technika	36
6.3. Skálatörvények ellenőrzése Ising lánc esetén numerikus renormalizációval .	37
6.3.1. Végpont-végpont korreláció méretfüggése	39
6.3.2. A mágnesezettség méretfüggése	40
6.4. Az Ising lánc mágnesezettségének sűrűségfüggvénye	42
6.4.1. Szabad határfeltételek	43
6.4.2. Egy rögzített és egy szabad határfeltétel esete	46
6.4.3. Két rögzített határfeltétel esete	47
6.5. Összefoglalás - numerikus eredmények az Ising lánc esetén	48
7. Összefoglalás	50
Köszönetnyilvánítás	51
Abstract	52
Függelék	53
A. Kesten-változók	53
B. Az erősen rendezetlen renormalizációs csoport technika (SDRG)	54
C. Skálatörvények rendezetlen rendszerekben	57
C.1. Végtelen rendezetlenségi skálázás	58
C.2. Skálázás a rendezetlen Griffiths fázisban	60
C.3. Skálázás a rendezett Griffiths fázisban	61

1. Bevezetés

A jól ismert termikus fázisátalakulások esetén a rendszer a hőmérséklet változásának hatására jut el az egyik egyensúlyi fázisából egy másikba. Ezzel szemben a nulla hőmérsékleten lezajló kvantum fázisátalakulásokban a rendszer egy ún. *kvantum kontroll-paraméter* megváltozásának következtében alakul át egy különböző fázisba. A szokásos termikus fluktuációk szerepét ebben az esetben a kvantumfluktuációk töltik be. Az általunk vizsgált kvantum fázisátalakulások további érdekessége, hogy ún. *rendezetlen rendszerekben* következnek be, ahol a modell paraméterei véletlenszerűek. A kvantum fluktuációk, a megjelenő erős korrelációk, valamint a rendezetlenségi fluktuációk összjátékának eredménye a termodinamikai mennyiségek és a dinamikai korrelációs függvények erős szingularitása [1, 2, 3]. A jelenség szokatlan módon kiterjed a kvantum kritikus régió kívülré is, ahol a térbeli korrelációk már rövid hatótávolságúak [3, 4]. A jelenség eredete, ahogy arra Griffiths rámutatott [5], azokban a ritka régiókban rejlik, ahol az erős kötések véletlenül, extrém fluktuációknak köszönhetően felhalmozódnak. Amellett, hogy a megjelenő érdekes, új fizika új elméleti megközelítések előtt nyitotta meg a kaput, kísérletileg is ellenőrizhetővé vált. A fém-félvezető átmenet esetén ilyen kísérletre példa [6, 7], míg spinűveg rendszerre [8].

A terület központi jelentőségű modellje a rend-rendezetlenség átmenetet mutató *rendezetlen transzverzális terű Ising lánc* (RTFIC: random transverse field Ising chain), amit a következő Hamilton-operátor definiál:

$$\mathcal{H}_I = - \sum_i J_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \sum_{i=1}^L h_i \sigma_i^z, \quad (1)$$

ahol $\sigma_i^{x,z}$ a Pauli-mátrixokat jelöli az i helyen. Az említett rendezetlenség a modell paramétereinek értékében jelenik meg. A J_i csatolások és a h_i külső terek ugyanis nem rögzítettek, hanem egy-egy ismert eloszlásból származó véletlen értékek. A dolgozatban a továbbiakban alkalmazott időfüggetlen, vagy más szóval folytott¹ rendezetlenség annak a fizikai helyzetnek felel meg, amikor az üvegek esetének megfelelően a vizsgált időskálánál lényegesen lassabban változik a rendezetlenség szerkezete. Emiatt a számításokban a véletlen paraméterek egy adott kiosztása mellett először végezzük el az időbeli átlagolást,

¹quenched

majd miután ezt elegendően sok független realizációra elvégeztük, átlagoljuk csak ki a kapott eredményeket a rendezetlenség szerint.

A fázisátalakulás helyétől, azaz a *kritikus ponttól* való távolságot ebben a modellben a következő (lineáris) kontrollparaméter méri:

$$\delta = \frac{[\ln h]_{\text{av}} - [\ln J]_{\text{av}}}{\text{var}(\ln J) + \text{var}(\ln h)}, \quad (2)$$

ahol $[\dots]_{\text{av}}$ a rendezetlenség feletti átlagolást, $\text{var}(x)$ pedig a szórásnégyzetet jelöli. $\delta > 0$ ($\delta < 0$) esetén a rendszer a paramágneses (ferromágneses) fázisban van, míg $\delta = 0$, azaz

$$[\ln h]_{\text{av}} = [\ln J]_{\text{av}} \quad (3)$$

felel meg a kvantum kritikus pontnak. Munkánk során először a kvantum Ising láncsal együtt két további modell (*antiferromágneses XX lánc* és *szoros kötésű lánc*) esetén határoztuk meg a kritikus ponton kívül megjelenő termodinamikai szingularitásokat. Ezután a kvantum Ising lánc mágnesezettségének eloszlását és skálatulajdonságait vizsgáltuk meg részletesebben numerikus renormalizálással. A kvantum Ising lánc központi szerepét mutatja, hogy a legrészletesebb numerikus és analitikus eredmények erre a modellre ismertek. Így például a kritikus pontban a tömbi (m_b), illetve a felületi (m_s) mágnesezettség mérettel való skálázása analitikusan ismert:

$$[m_b(L)]_{\text{av}} \sim L^{-x_b}, \text{ valamint a felületen: } [m_s(L)]_{\text{av}} \sim L^{-x_s}. \quad (4)$$

A megjelenő mágneses kritikus exponensek, vagy más néven mágneses *skáladimenziók* értéke a következő:

$$x_b = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}, \quad x_s = \frac{1}{2}, \quad (5)$$

ahol x_b a tömbi, azaz felülettől távoli, x_s pedig a felületen érvényes mágneses skáladimenzió.

Természetesen a transzverzális terű kvantum Ising modell tetszőleges dimenzióban is hasonlóan definiálható. Az előálló fázisdiagram vázlata az 1. ábrán látható. A dolgozat-

ban a legegyszerűbb egydimenziós eset vizsgálatára szorítkozunk, ahol a legerősebben látható az eltérés a szokásos fizikától. Természetesen távlati tervünk eredményeink kiterjesztése magasabb dimenziós rendszerekre is, ahol a vizsgálat egyre nehezedik (például a kritikus pont helye sem ismert). Mindazonáltal ahol a megközelítési mód lehetővé teszi, együtt kezeljük a magasabb dimenziós, illetve az általános geometriájú rendszereket is az egydimenziós esettel. Itt jegyezzük meg, hogy a rendezetlenségért felelős eloszlásfüggvények konkrét alakját egyik a dolgozatban vizsgált esetben sem kötöttük ki, a kapott eredményeink általánosan érvényesek, de természetesen függvényei az eloszlások jellemzőinek (pl. a várható értéküknek).

A dolgozat szerkezete a következő. A dolgozatban vizsgált rendezetlen kvantum spinláncok ismertetése (2. fejezet) után a Dyson-Schmidt technikát alkalmazva meghatározzuk az alacsony energiájú gerjesztések állapotsűrűségét (3. fejezet), ami már lehetővé teszi a termodinamikai szingularitások kiszámítását (4. fejezet). A Sinai bolyongással való közeli kapcsolat alapján az 5. fejezetben megadunk egy alternatív megoldási utat is. Ezután az általunk implementált numerikus renormalizációs csoport technika segítségével részletesebben is megvizsgáljuk az RTFIC kritikus pontbeli mágnesezettség profilját és skálatulajdonságait (6. fejezet). Az összefoglalásban áttekintjük az elért eredményeket (7. fejezet), amelyekből két tudományos közlemény is született [9, 10].

1.1. A termikus és a kvantum fázisátalakulások viszonya

Mint már említettük, a dolgozatban vizsgált kvantum fázisátalakulások jelentős eltéréseket mutatnak a szokásos, termikus fázisátalakulásoktól. Ennek megértéséhez először vizsgáljuk meg, hogy a szokásos termikus fázisátalakulásokban miért elégedhetünk meg a klasszikus közelítéssel. Az egy szabadsági fokra jutó termikus energia $k_B T$, ahol k_B a Boltzmann-állandó, miközben az ω_c frekvenciájú fluktuáció gerjesztési energiája $\hbar\omega_c$. Másodrendű fázisátalakulás esetén a korrelációs hossz (ξ) általában hatvány alakban divergál:

$$\xi \sim \delta^{-\nu} \quad (6)$$

ahol a δ *kontrollparaméter* méri a kritikus ponttól való távolságot (a kritikus pontban $\delta = 0$). A kritikus pont elérésével a fluktuációk nemcsak térben terjednek ki, nagyon le is lassulnak, divergens relaxációs időt (τ) eredményezve. Ez a jól ismert kritikus lelassulás jelensége. Szokásos módon bevezethetjük a dinamikai exponenst [11], z -t

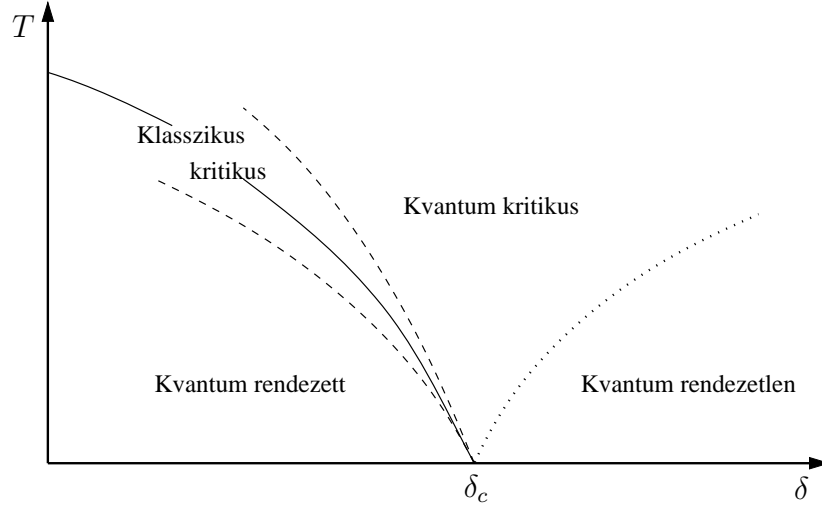
$$\tau \sim \xi^z. \quad (7)$$

A τ időskálának megfelelő energiakvantum nagysága $\hbar\omega_c$, ahol $\omega_c \sim 1/\tau$. Ebből közvetlenül arra jutunk, hogy véges hőmérsékleten a kvantummechanika irreleváns a fázisátalakulás szempontjából, azaz $\hbar\omega_c \ll k_B T_c$, ha $\hbar\delta^{\nu z} \ll k_B T$, azaz

$$\delta \ll T_c^{1/\nu z} \quad (8)$$

ami viszont mindig teljesül elegendően közel a kritikus ponthoz, feltéve, hogy T_c véges. Ahol ez teljesül, ott a klasszikus (termikus) kritikus viselkedést találjuk. Minél alacsonyabb viszont T_c , annál közelebb kell lennünk a kritikus ponthoz, hogy a klasszikus viselkedést lássuk. Amikor egy paraméter változtatásának hatására azonban T_c nullává válik, akkor a nullahőmérsékletű átmenetnél sohasem a klasszikus viselkedést látjuk, hanem a *kvantum univerzalitási osztályba* tartozó kritikus viselkedést, ami általában eltér a klasszikus univerzalitási osztályétól. Az 1. ábrán egy tipikus fázisdiagrammon [12] láthatjuk, hogy a fázisátalakulás hőmérsékletét nullává tevő Δ paraméter változtatásával a klasszikus tartomány mérete nullához tart, ahogyan $T_c \rightarrow 0$. A kvantum univerzalitási osztály a *kvantum rendezett* és a *kvantum rendezetlen* régióban jelenik meg. A köztes,

ún. *kvantum kritikus tartományban* az egyetlen energiaskála $k_B T$, valamint érdekes predikciók adhatóak a dinamikai skálázásra $\hbar\omega/k_B T$ függvényeként [13].



1. ábra. Az ábrán a kvantum rendszer viselkedésének különböző régiói láthatóak, ahogyan a modell egy paramétere μ (a nemlineáris kontrollparaméter), $T_c = 0$ közelébe viszi a rendszert. A folytonos vonal mutatja a fázishatárt, míg a szaggatott és pontozott vonal a különböző típusú viselkedések közötti átmeneteket jelöli. A klasszikus kritikus viselkedés tartománya nullára csökken, hogyan $T_c \rightarrow 0$. A kvantum univerzalitási osztályba tartozó viselkedést akkor látjuk, amikor a $T = 0$, $\delta = \delta_c$ ponton át jutunk el a kvantum rendezetlen fázisból a kvantum rendezett fázisba.

Jól ismert [14], hogy a d dimenziós kvantummechanikai probléma leírható egy effektív klasszikus hatással d tér és egy képzetes idő dimenzióban. A rendszer mérete a képzetes idő dimenzióban $\hbar/(k_B T)$. Ebben a képben könnyen látható, hogy a kvantummechanika miért csak $T = 0$ -n válik fontossá. Bármely véges hőmérsékleten egy szalaggal állunk szemben, ami idő irányban véges, míg térbeli irányokban végtelen. Amikor az idő iránybeli korrelációs hossz eléri a szalag szélességét, nem tud tovább nőni, így véges méret skálázással leírhatóvá válik [15]. A kritikus viselkedést csak a térbeli divergáló korrelációs hossz határozza meg, azaz egy effektív d dimenziós klasszikus problémával állunk szemben. Azonban nulla hőmérsékleten a rendszer mérete idő irányban is végtelen, azaz egy $d + 1$ dimenziós rendszerrel dolgozunk, ami általában eltérő kritikus viselkedést mutat az iménti d dimenziós effektív rendszertől. Tehát a kvantum klasszikus átmenet ez alapján hasonló a dimenzionális átmenetekhez. Azonban a dolgozatban tárgyalt időfüggetlen rendezetlenség esetén a rendezetlenség független a képzetes időtől, azaz tökéletesen korrelált az időirányban.

Egyszerű esetekben, rendezetlenség nélkül tehát egy eggyel magasabb dimenziós klasszikus rendszer tárgyalásához jutunk [16], amiben a tér és idő dimenziók ekvivalensek. Másképpen fogalmazva, a dinamikai exponens $z = 1$. Azonban időfüggetlen, folytott rendezetlenség esetén a térbeli és időbeli irány nem ekvivalens, azaz általában $z \neq 1$. A skálázás tehát ebben az esetben *anizotrop*, ami a numerikus adatok kiértékelésében anizotrop véges méret skálázást igényel [17, 18].

1.2. Griffiths-McCoy szingularitások

Az időfüggetlen, folytott rendezetlenség erős hatással van az alacsony energiájú alacsony hőmérsékletű és hosszú hullámhosszú viselkedésére a kvantumrendszernek. A kritikus ponton kívülre, az ún. Griffiths fázisra is kiterjedő termodinamikai szingularitások háttérben bizonyos ritka realizációk, illetve ritka régiók állnak, ahogyan arra Griffiths rámutatott [5]. A kvantum Ising lánc paramágneses fázisa esetén ezek azok a tartományok, ahol az erős kötések véletlenül, azaz extrém fluktuációknak köszönhetően felhalmozódnak. Ezekben a régiókban így a rendszer a lokálisan termodinamikailag instabil ferromágneses fázisban lesz. Ennek következményeként ezen ritka régiókban a gerjesztési energia nagyon alacsony, a relaxáció tehát nagyon lassú, a relaxációs idő ($\tau \sim E^{-1}$) a termodinamikai határesetben divergál. Ha véges ℓ méretű részrendszert tekintünk, a leglassabb relaxáció karakterisztikus ideje véges marad és aszimptotikusan

$$\tau \sim \ell^z \tag{9}$$

alakban írható. Itt $z = z(\delta)$ a dinamikai exponens, ami általában a kritikus ponttól való távolságot mérő kvantum kontrollparaméter (δ) folytonos függvénye.

A skálahipotézisnek megfelelően [19, 20, 21] az alacsony energiájú gerjesztések száma adott E energia alatt $N(E, \ell)$, csak az $E\ell^z$ kombinációtól függ. Ezen kívül kicsi, rögzített E energia esetén arányos a térfogattal $\sim \ell^d$, hiszen a vizsgált ritka régió előfordulási valószínűsége lineárisan nő a térfogattal. Ebből tehát az E energia alatti gerjesztések száma a termodinamikai határesetben:

$$N(E) \sim E^{d/z}, \tag{10}$$

amiből a keresett $n(E)$ állapotsűrűség

$$n(E) \sim E^{d/z-1} . \quad (11)$$

A termodinamikai mennyiségek megkaphatóak az állapotsűrűség integrálásával, így általában ezek is szingulárisak lesznek. Például, a rendezetlen Griffiths fázisban az alacsony hőmérsékletű viselkedése az *átlagos lineáris szuszceptibilitásnak* ($\chi(T)$), illetve a *fajhőnek* ($c_v(T)$) várhatóan a következő alakú (139) [3, 4]:

$$\chi(T) \sim T^{-1+d/z}, \quad c_v(T) \sim T^{d/z} . \quad (12)$$

Kis külső térnél ($H \approx 0$), a nullahőmérsékletű mágnesezettség várhatóan (C.2. Függelék):

$$m(H) \sim H^{d/z} . \quad (13)$$

A (12) egyenletből láthatjuk, hogy nullahőmérsékleten a szuszceptibilitás divergens, ha $z(\delta) > d$, amit McCoy fedezett fel a kvantum Ising láncra vonatkozó egzakt számolásban [22]. A termodinamikai mennyiségek divergenciáit a két lényeges hozzájárulást adó kutató alapján Griffiths-McCoy szingularitásoknak nevezzük. A skálahipotézishez kapcsolódó részletesebb eredményeket a C. függelékben foglaltuk össze.

Egydimenzióban a Griffiths-McCoy szingularitásokra vonatkozó részletes eredményeket részben numerikus szimulációkkal (szabad-fermion technikákkal [23, 24, 25, 26, 21], sűrűségmátrix renormalizációs csoport technikával² [31, 27, 28, 29, 30], kvantum Monte Carlo szimulációkkal [32, 33]), részben pedig az erősen rendezetlen renormalizáció technikára³ [3] alapozott analitikus számításokkal [31, 34, 35, 36, 37, 38] érték el. Magasabb dimenzióban numerikusan vizsgálták a Griffiths-McCoy szingularitásokat, így pl. kvantum Monte Carlo szimulációkkal [39, 40] és az erősen rendezetlen renormalizáció technika numerikus implementációjával.

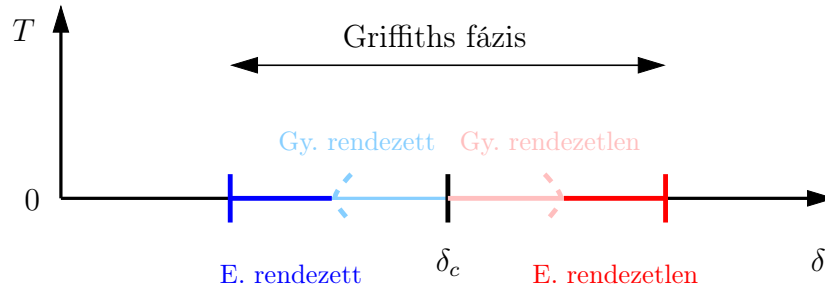
Analitikus és feltehetően egzakt eredményekből kevés van és ezek is leginkább a transzverzális terű Ising láncra szorítkoznak. A renormalizációs egyenletek analitikus megoldását

²density matrix renormalization group (DMRG)

³strong disorder renormalization group (SDRG)

először Fischer végezte el a kritikus pont közelében [34, 35], azaz a *gyengén rendezett*, illetve *gyengén rendezetlen* Griffiths fázisban, ahol a dinamikai exponens $z(\delta) \sim 1/|\delta|$ alakban divergál. A renormalizálással kapható megoldást ezután kiterjesztették a teljes Griffiths fázisra [31, 38], ahol $z(\delta)$ értéke egyezést mutat a véletlen közegbeli véletlen bolyongássá való leképezéssel kapott eredményekkel [41].

A 2. ábrán vázlatosan látható a nullahőmérsékletű kvantum kritikus pont és környezete. A kiterjedt Griffiths fázis négy részre bontható. Ahol a $|\delta| \ll 1$ közelítés helytálló, ott húzódik a gyengén rendezett, illetve a gyengén rendezetlen Griffiths fázis. Ezen túlmenve jutunk az erősen rendezett, illetve erősen rendezetlen Griffiths fázisba.



2. ábra. A nullahőmérsékletű kvantum kritikus pont és környezete. A kiterjedt Griffiths fázis négy részre bontható. A $|\delta| \ll 1$ közelítés érvényességi tartományában található a gyengén rendezett, illetve a gyengén rendezetlen Griffiths fázis, ezen kívül pedig az erősen rendezett, illetve erősen rendezetlen Griffiths fázis.

2. A vizsgált rendezetlen kvantum spinláncok

2.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben a már megismert rendezetlen transzverzális terű Ising lánc mellett bemutatunk két további intenzíven kutatott egydimenziós rendezetlen kvantum rendszert. A modellek közös vonása a Griffiths fázisban megjelenő termodinamikai szingularitások jelenléte, ahol az eredmények kvantitatíven is megfeleltethetők egymásnak, ugyanis - mint látni fogjuk - az alacsony energiájú viselkedésük közös alakra hozható.

2.2. Rendezetlen szoros kötésű modell

Az első vizsgált modell az egydimenziós szoros kötésű modell⁴ off-diagonális rendezetlenséggel [42], amit az alábbi Hamilton-operátor definiál:

$$\mathcal{H} = \sum_i t_i (|i\rangle\langle i+1| + |i+1\rangle\langle i|), \quad (14)$$

ahol a t_i együtthatók véletlen számok. A rendszert páros-páratlan aszimmetria esetén tekintjük, ahol a t_i együtthatók különböző eloszlásból származnak a páros (t_e) és páratlan (t_o) helyeken. A kvantum kontrollparaméter ezt az aszimmetriát méri:

$$\delta = \frac{[\ln t_o]_{\text{av}} - [\ln t_e]_{\text{av}}}{\text{var}(\ln t_e) + \text{var}(\ln t_o)}, \quad (15)$$

$\delta > 0$ ($\delta < 0$) esetén a modell aszimmetrikus, a részecskék gyakrabban találhatók meg a páratlan (páros) helyeken. A szimmetrikus $\delta = 0$ eset felel meg a kvantum kritikus pontnak. A $|i\rangle$ bázisban a Hamilton-operátor tridiagonális alakú:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & t_1 & & & \\ t_1 & 0 & t_2 & & \\ & t_2 & 0 & t_3 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (16)$$

Ennek a mátrixnak a sajátértékproblémáját szeretnénk megoldani:

$$\mathcal{M}\vec{\alpha} = E\vec{\alpha}. \quad (17)$$

⁴disordered tight-binding model

Ami a komponenseket tekintve a következő egyenleteket jelenti:

$$\alpha_{i-1}t_{i-1} + \alpha_{i+1}t_i = E\alpha_i . \quad (18)$$

2.3. Rendezetlen antiferromágneses XX-lánc

A második vizsgált rendszerünk a rendezetlen antiferromágneses XX-lánc, amit az alábbi Hamilton-operátor definiál:

$$\mathcal{H}_{XX} = \sum_i J_i (S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y) , \quad (19)$$

ahol $S_i^{x,y}$ az i helyen lévő $1/2$ -es spinoperátor. Ebben a modellben a J_i csatolások véletlen változók páros-páratlan aszimmetriával, azaz különböző eloszlással a páros (J_e), illetve páratlan (J_o) helyeken. A jól ismert Jordan-Wigner transzformációval

$$a_j^\pm = S_j^x \pm iS_j^y \quad (20)$$

$$c_i^+ = a_i^+ \exp \left[\pi i \sum_j^{i-1} a_j^+ a_j^- \right] \quad (21)$$

$$c_i = \exp \left[\pi i \sum_j^{i-1} a_j^+ a_j^- \right] a_i^- \quad (22)$$

a modell fermion keltő (c_i^+) és eltüntető (c_i) operátorokkal áll elő [43]:

$$\mathcal{H}_{XX} = \sum_i \frac{1}{2} (J_i c_i^+ c_{i+1} + \text{h.c.}) . \quad (23)$$

Az alacsony energiájú gerjesztések egy részecskét tartalmaznak, így $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i c_i^+ |0\rangle$ alakba írhatóak, ahol $|0\rangle$ a fermion vákuum. Ezen az altéren dolgozva az energiaszinteket a szoros kötésű modellnél látott \mathcal{M} (16) mátrix sajátértékeiként kapjuk meg az alábbi megfeleltetéssel:

$$t_i = J_i/2 \quad (24)$$

Így a kvantum kontrollparaméter δ is közvetlenül adott a (15) kifejezéssel. Az aszimmetrikus esetben $\delta > 0$ ($\delta < 0$) esetén a rendszer dimerizálódik, ami által a rendszer a kvantum dimer fázisba kerül [44] főleg a páros (páratlan) kötéseken. A szimmetrikus $\delta = 0$ eset a kvantum kritikus pont, ahol a rendszer az ún. rendezetlen szinglet fázisban van [45].

2.4. Rendezetlen transzverzális terű Ising-lánc

Végül tekintsük az RTFIC esetét, ami a rend-rendezetlenség átmenetet mutató rendszerek prototípusa [34, 35]. A rendszer Hamilton-operátora (1). Ahogyan az XX-lánc esetében, itt is elvégezhető a Jordan-Wigner transzformáció, amivel \mathcal{H}_I -t fermion operátorokkal fejtjük ki [46]:

$$\mathcal{H}_I = \sum_i h_i \left(c_i^+ c_i - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \sum_i J_i (c_i^+ - c_i)(c_{i+1}^+ + c_{i+1}) \quad (25)$$

ami kanonikus transzformációval diagonalizálható. Az alacsony energiájú gerjesztések egy fermiont tartalmaznak, az energiaszinteket pedig az alábbi szimmetrikus mátrix pozitív sajátértékei adják [47, 26]:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & h_1 & & & \\ h_1 & 0 & J_1 & & \\ & J_1 & 0 & h_2 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (26)$$

Ez ekvivalens a már ismert \mathcal{M} -mel (16) a $t_{2i-1} = h_i$ és $t_{2i} = J_i$ megfeleltetéssel. Ezzel a megfeleltetéssel és a (2) egyenlettel az RTFIC kontrollparamétere, ami az átlagos logaritmizált terek és az átlagos logaritmizált csatolások különbségével arányos, megegyezik a korábbi két modellnél látott kontrollparaméterrel (15). $\delta > 0$ ($\delta < 0$) esetén a rendszer a paramágneses (ferromágneses) fázisban van, míg $\delta = 0$ felel meg a kvantum kritikus pontnak.

2.5. Összefoglalás - alacsony energiájú viselkedés

A fentiek alapján tehát kijelenthetjük, hogy mindhárom ismert modell alacsony energiás viselkedése megkapható a (16) egyenletben megismert \mathcal{M} mátrix sajátértékproblémájából (17). \mathcal{M} egy nemnegatív elemekből álló tridiagonális véletlen mátrix páros-páratlan aszimmetriával, ahol a páros, illetve páratlan helyeken álló mátrixelemek különböző eloszlásból származhatnak. A szimmetrikus eset felel meg a fázisátalakulás helyének, azaz a kvantum kritikus pontnak. A következő fejezetben $E = 0$ körül kiszámítjuk az \mathcal{M} mátrix állapotsűrűségét a Dyson-Schmidt technikával.

3. Az állapotsűrűség kiszámítása a spektrum közepén

3.1. Bevezetés és célkitűzések

Ebben a fejezetben az előző fejezetben ismertetett kvantumláncok közös, alacsony energiájú állapotsűrűségének ($n(E)$) kiszámítását tűztük ki célul, felhasználva az Eggartertől és Riedingertől származó *véletlen bolyongássá alakítás* ötletét [48]. Ők folytonos közelítésben határozták meg az állapotsűrűséget, ami a kvantum kritikus pontnak felel meg, szimmetrikus \mathcal{M} mátrixszal (16). A folytonos közelítés alkalmazható a gyengén rendezetlen Griffiths fázisban is, ahol az antiferromágneses XX-láncre már ismert a megoldás [49]. Munkánk során az általános aszimmetrikus \mathcal{M} mátrix esetét vizsgáltuk, ami felöleli a gyengén rendezetlen Griffiths fázis mellett az erősen rendezetlen Griffiths fázist is, ahol a kontinuum közelítés már nem érvényes.

3.2. A véletlen bolyongássá való leképezés

A (16) egyenletben bevezetett \mathcal{M} állapototsűrűségének kiszámításához bevezetünk egy új vektort, $\vec{\Delta}$, aminek a komponenseit $\Delta_i = \alpha_{i-1}t_{i-1}/\alpha_i$ adják. Ezekkel \mathcal{M} sajátértékproblémája, amit a (18) egyenletben komponensenként kifejtettünk, a következő alakban írható:

$$\Delta_{i+1} = t_i^2/(E - \Delta_i). \quad (27)$$

A Dyson-Schmidt eljárás fő észrevétele az egydimenziós Hamilton operátorok *csomó szám-lálási tétele*, ami alapján az adott energia alatti állapotok száma, vagyis az $N(E) = \int_{-\infty}^E n(E')dE'$ lépcsőfüggvény megegyezik a pozitív tagok részarányával a Δ_i sorozatban [50, 51]. A spektrum közepén, $E = 0$ -nál $\vec{\Delta}$ komponensei váltakozó előjelűek, azaz az $s_i \equiv \text{sign}[\Delta_i(-1)^i]$ előjelváltozók teljesen rendezett állapotban vannak: $\dots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots$, aminek következtében $N(0) = 1/2$. $E \neq 0$ esetén érdemes a (27) egyenletet tovább iterrálni [48]:

$$\begin{aligned} \Delta_{2i} &= f_{2i-2} \left(\frac{t_{2i-1}}{t_{2i-2}} \right)^2 \Delta_{2i-2} \\ f_{2i-2} &= \frac{1 - E/\Delta_{2i-2}}{1 + (E\Delta_{2i-2} - E^2)/t_{2i-2}^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Az általunk vizsgált esetben, azaz kis (pozitív) E esetén az egyenlet különbözőképpen viselkedik Δ_{2i} értékeinek különböző tartományaiban. Ezeket az alábbiakban összegezzük:

$$\Delta_{2i+1}/\Delta_{2i} < 0, \quad \text{ha} \quad \Delta_{2i} < E \quad (29a)$$

$$f_{2i} = 1, \quad \text{ha} \quad E \gg \Delta_{2i} \gg \tilde{t}^2/E \quad (29b)$$

$$\Delta_{2i+2}/\Delta_{2i} < 1, \quad \text{ha} \quad \Delta_{2i} \approx \tilde{t}^2/E \quad (29c)$$

ahol \tilde{t} a tipikus (átlagos) mátrixelemet jelenti. (29b)-nek megfelelően az előjelváltozók a $[E, \tilde{t}^2/E]$ tartományban rendezettek maradnak, például $s_i = \uparrow$. A véges felső határnál, $\Delta_{max} = \tilde{t}^2/E$ -nél a sorozat „visszaverődik”, miközben $s_i = \uparrow$ marad (29c). Az alsó határnál $\Delta_{min} = E$ -nél ezzel szemben a sorozat előjelet vált, amivel új domén kezdődik, ahol $s_i = \downarrow$ (29a). Ennek következtében kis $E > 0$ esetén az előjelváltozók doménekbe rendeződnek $\dots \downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow \dots$. A doménfalak hatása abban nyilvánul meg, hogy a Δ_i sorozatban megnő a pozitív előjelűek száma, azaz $N(E) > 1/2$ lesz. Az átlagos doménméretet $\tilde{\ell}$ -vel jelölve az állapotsűrűség alakja aszimptotikusan:

$$N(E) - N(0) = \frac{1}{2\tilde{\ell}}. \quad (30)$$

Így tehát a spektrum közepén az állapotsűrűség meghatározásához elegendő mostantól egy tipikus doménen belül végigkövetnünk a Δ_i sorozatot és meghatározni az $\tilde{\ell}$ méretét. Érdeemes a problémát a következő képen tárgyalni: a (28) egyenletben $f_{2i-2} = 1$ helyettesítéssel élünk, miközben visszaverő falat helyezünk Δ_{max} -hoz és elnyelő falat Δ_{min} -hez. Logaritmikus változókra $u_{2i} = \ln \Delta_{2i}$ áttérve a probléma véletlen bolyongásként tűnik fel:

$$u_{2i} = 2(\ln t_{2i-1} - \ln t_{2i-2}) + u_{2i-2}. \quad (31)$$

Visszaverő határfeltétellel ($u = u_{max}$)-nál és elnyelő határral ($u = u_{min}$)-nél (3. ábra). Ebben a képen a bolyongó részecske (vagy polimer) $u_0 = u_{max}$ -nál indul és u_{min} -nél az *átlagos első áthaladási ideje*⁵ (vagy polimer esetén a hossza) éppen $\tilde{\ell}$, azaz $u_{min} = u_{\tilde{\ell}}$.

⁵mean first-passage time

3.3. Vizsgálat a diffúziós egyenlet érvényességi tartományában

Folytonos közelítéssel élve a véletlen bolyongásra vonatkozó (31) egyenlet diffúziós egyenletté írható

$$\frac{\partial P(u, \ell)}{\partial \ell} = D \frac{\partial^2 P(u, \ell)}{\partial u^2} - v \frac{\partial P(u, \ell)}{\partial u}, \quad (32)$$

ahol $P(u, \ell)$ a bolyongó részecske valószínűségeloszlása, $D = 2[\text{var}(\ln t_e) + \text{var}(\ln t_o)]$ a diffúziós együttható, $v = 2([\ln t_o]_{\text{av}} - [\ln t_e]_{\text{av}})$ pedig a drift sebesség. A bolyongó részecske merőleges irányú fluktuációinak tipikus mérete $\tilde{u} = D/v = \delta^{-1}$, miközben a két visszaverődés közötti átlagos távolság ξ az $\tilde{u} \sim \sqrt{D\xi}$ összefüggésből kapható meg:

$$\xi \sim D^{-1} \delta^{-2}, \quad (33)$$

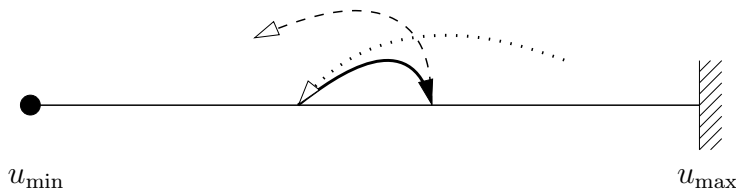
ami megegyezik az SDRG eljárással kapott eredménnyel [34, 35]. Az ugrások tipikus mérete a szokásos rácsállandó analógiájára használható. Természetesen a folytonos közelítés csak akkor érvényes, ha az így bevezetett rácsállandó sokkal kisebb a korrelációs hossznál. Ez a feltétel teljesül a kritikus pontban, ahol $\delta = 0$, illetve a gyengén rendezetlen Griffiths fázisban, ahol $|\delta| \ll 1$.

3.3.1. Kritikus pont

A kritikus pontban a korrelációs hossz (ξ) kívül a transzverzális fluktuációk tipikus mérete (\tilde{u}) is divergál. Az $\tilde{\ell}$ hosszúságskálával kifejezve őket: $\xi \sim \tilde{\ell}$ és $\tilde{u} \sim \sqrt{D\tilde{\ell}}$. Ebben az esetben az elnyelődéshez elegendőek a *tipikus fluktuációk*, amikor $\tilde{u} \sim \Delta u = u_{\max} - u_{\min} = \ln(\tilde{t}^2/E^2)$, azaz amikor \tilde{u} az intervallum hosszával egyezik meg. Ebből azt kapjuk, hogy $\tilde{\ell} \sim \frac{1}{D} \ln(\tilde{t}^2/E^2)^2$, azaz

$$N(E) - N(0) \sim D [\ln(\tilde{t}^2/E^2)]^{-2}. \quad (34)$$

Ez Eggarter és Riedinger klasszikus eredménye [48].



3. ábra. Véletlen bolyongás a megfelelő határfeltételekkel, amire a spektrum kiszámításának problémája vezet. $u = u_{\max}$ esetén a bolyongó részecske visszaverődik, míg $u = u_{\min}$ esetén elnyelődik.

3.3.2. Gyengén rendezetlen Griffiths fázis

A gyengén rendezetlen Griffiths fázisban, ahol $0 < \delta \ll 1$, a bolyongó részecskét a drift a visszaverő határhoz hajtja. Ebben a tartományban a korrelációs hossz és a transzverzális fluktuációk tipikus mérete is véges, de sokkal nagyobb mint a rácsállandó, tehát még érvényes a folytonos közelítés. Ebben az esetben \tilde{u} sokkal kisebb az intervallum hosszánál, azaz az elnyelődés nagyon kis valószínűséggel következik be, a ritka régiók hatására $p(\Delta u) \propto \exp(-\frac{\Delta u}{\tilde{u}})$, azaz az *extrém fluktuációknak* köszönhetően. Mielőtt azonban ez bekövetkezne, a bolyongó részecske számos alkalommal visszaverődik. A független bolyongások tipikus hossza $\tilde{\ell}/\xi$, amit extrém érték statisztika segítségével kaphatunk meg [52]: $p(\Delta u)\tilde{\ell}/\xi = \mathcal{O}(1)$. Ebből tehát

$$\tilde{\ell} \sim \xi \exp\left(\frac{v}{D} \ln(\tilde{t}^2/E^2)\right) \sim \left(\frac{\tilde{t}}{E}\right)^{1/z}, \quad (35)$$

ahol

$$\frac{1}{z} = \frac{2v}{D} = 2 \frac{[\ln t_o]_{\text{av}} - [\ln t_e]_{\text{av}}}{[\text{var}(\ln t_e) + \text{var}(\ln t_o)]} = 2\delta. \quad (36)$$

Itt z nem más, mint a korábban (9) definiált dinamikai exponens. A gyengén rendezetlen Griffiths fázisban tehát az állapotsűrűség a spektrum közepén hatványfüggvény alakú szingularitást mutat:

$$N(E) - N(0) \sim \left(\frac{\tilde{t}}{E}\right)^{-1/z}, \quad (37)$$

ami ekvivalens a (10) egyenletbeli alakkal. A rendezetlen antiferromágneses XX-lánca ez egy ismert eredmény [49].

3.4. Vizsgálat az erősen rendezetlen Griffiths fázisban

Az erősen rendezetlen Griffiths fázisban a korábbiakban bemutatott folytonos közelítés már nem alkalmazható, hiszen a korrelációs hossz a rácsállandó nagyságrendjébe esik. Ebben az esetben tehát az előzőekkel ellentétben diszkrét változókat alkalmazunk és nem végezzük el a logaritmikus változókra való áttérést sem. A bolyongó részecske k -adik független bolyongásakor a j -dik lépésben elfoglalt helyzetét $\Delta_{2j}^{(k)}$ -val jelöljük. A k -adik független bolyongás kezdetét $r(k)$ -val jelöljük, amivel nagy k esetén $r(k)/k = \xi$. Bevezetjük

a bolyongó részecske normalizált pozícióját is:

$$\rho_{2j}^{(k)} \equiv \frac{\Delta_{2j}^{(k)}}{\Delta_{max}} = \prod_{j'=1+r(k)}^{j+r(k)} \left(\frac{t_{2j'-1}}{t_{2j'-2}} \right)^2 . \quad (38)$$

Az elnyelődés feltétele az alábbi alakban írható:

$$\min_k \min_{1 < j < \Delta r(k)} \rho_{2j}^{(k)} = \frac{\Delta_{min}}{\Delta_{max}} = \frac{\tilde{t}^2}{E^2} , \quad (39)$$

ahol $\Delta r(k) = r(k+1) - r(k)$, ami nagy k esetén $\Delta r = \infty$ összefüggéssel közelíthető. Figyelembe véve, hogy $\rho_{2j}^{(k)}$ tipikusan sokkal nagyobb a minimális értékénél a minimum nagyságrendjére a következő közelítéssel élhetünk:

$$\min_k \min_{1 < j < \infty} \rho_{2j}^{(k)} \propto \min_k \left[y^{(k)} \equiv \sum_j (\rho_{2j}^{(k)})^{-1} \right]^{-1} . \quad (40)$$

Itt $y^{(k)}$ *Kesten változó* [53, 54, 55] minden k -ra, amire ismert, hogy a nagy argumentumok esetén értékeinek eloszlásfüggvénye szingularitással rendelkezik (A. Függelék):

$$p(y) \underset{y \rightarrow \infty}{\sim} y^{-(1+\mu)} , \quad (41)$$

ahol, μ nem más, mint a következő implicit egyenlet pozitív megoldása:

$$\left[\left(\frac{t_o^2}{t_e^2} \right)^\mu \right]_{av} = 1 . \quad (42)$$

Ezáltal a független bolyongások tipikus száma $\tilde{\ell}/\xi$ az extrém érték statisztika alapján kapható meg [52]: $\tilde{\ell}/\xi \int_{y_{max}}^\infty p(y) dy = 1$, amiből:

$$\tilde{\ell} \sim \xi \left(\frac{t}{E} \right)^{2\mu} . \quad (43)$$

Összehasonlítva a (35) egyenlettel a dinamikai exponens értéke az erősen rendezetlen Griffiths fázisban:

$$\frac{1}{z} = 2\mu , \quad (44)$$

ami a $\delta \ll 1$ határesetben visszaadja a gyengén rendezetlen Griffiths fázisbeli eredményt (36) [31, 38]. Így a (44) egyenletbeli megfeleltetéssel a spektrum közepén az állapotsűrűséget a teljes Griffiths fázisban a (37) egyenlet adja meg.

3.5. Kapcsolat az erősen rendezetlen renormalizációs technikával

A spektrum közepén az \mathcal{M} Hamilton operátor állapotsűrűsége megvizsgálható a B. Függelékben részletesebben is bemutatott erősen rendezetlen renormalizációs csoport technikával (SDRG) is [3]. Első lépésként csökkenő sorrendbe rendezzük a t_i mátrixelemeket, ahol a legnagyobb értéket használjuk $\Omega = \max_i \{t_i\}$ az energiaskála beállítására. Legyen a legnagyobb mátrixelem a j -edik és $j + 1$ -edik rácspontot összekötő t_j . Ezután távolítsuk el a sajátértékprobléma egyenleteiből azt a két egyenletet, ami tartalmazza t_j -t. Ezt másodrendű perturbációszámítással elvégezve az effektív mátrixelem t' , ami a $j - 1$ -edik és $j + 2$ -edik rácspontot köti immár közvetlenül össze $t' \approx \frac{t_{j-1}t_{j+1}}{t_j}$. Az így kapott összefüggés $\mathcal{O}((t_{j-1}/t_j)^2)$ és $\mathcal{O}((t_{j+1}/t_j)^2)$ rendig korrekt. Ha az eredeti mátrixelemekhez egységnyi hosszt rendelünk, akkor ez az új effektív mátrixelem $m' = m_{j-1} + m_j + m_{j+1} = 3$ hosszú lesz. A következőkben ezt a decimálási lépést ismétljük, miközben az energiaskála csökken, a távolságskála pedig növekszik. A mátrixelemek eloszlásfüggvénye $R_e(t_e, \Omega)$ és $R_o(t_o, \Omega)$ egyre közelebb kerül a fixpontbeli alakhoz. Ezeket a típusú renormalizációs egyenleteket mind a kritikus pontban [34, 35], mind pedig a Griffiths fázisban [31, 38] megoldották már analitikusan. Az alábbiakban összefoglaljuk a Griffiths fázisra vonatkozó ismert eredményeket $\delta > 0$ esetén.

Habár a renormalizáció kezdő lépéseiben a t_e és t_o mátrixelemek egyformán decimálódnak, később az eljárás aszimmetrikussá válik. Ahogyan a tipikus hossz $m' \sim \xi$ fölé nő, szinte kizárólag csak t'_o mátrixelemeket tüntetünk el, miközben a t'_e mátrixelemek nagyon kicsivé válnak. A fixpontban, ahol $\Omega \rightarrow \Omega^* = 0$ ezek alapján $t'_e/t'_o \rightarrow 0$. Ennek következményeként az alacsony energiájú gerjesztések energiája egyszerűen $E \simeq t'_o$ lesz.

A fixpontban t_o eloszlásfüggvénye [31, 38] $R_o(t_o, \Omega) = \frac{2\mu}{\Omega} \left(\frac{\Omega}{t_o}\right)^{1-2\mu}$, ahol μ a (42) egyenlet megoldása. Ez ekvivalens a gerjesztési energiák (10) egyenletben megadott alakjával a (44) egyenletben megadott dinamikai exponenssel. Visszatérve a véletlen bolyongási kép és az SDRG eljárás közötti kapcsolatra a renormalizációs lépések eredményeként előálló

1. táblázat. Analóg mennyiségek a véletlen bolyongásban (RW) és az SDRG eljárásban

eljárás	független egység	távolságskála	energiaskála
RW	bolyongás	bolyongás mérete	$\min_j \rho_{2j}^{(k)}$
SDRG	spinklaszter	spinklaszter mérete	$t'_o(k)$

effektív $t'_e(k) (\gg t'_o(k))$ mátrixelemek $m'(k) \sim \xi$ hosszal ekvivalensek egy (két visszaverődés közötti), $\Delta r(k) \sim \xi$ méretű bolyongással, aminek a minimális értéke $\rho_{2j}^{(k)}$ nem más, mint $t'_o(k)$ normalizált értéke. A két megközelítésbeli analóg mennyiségeket foglalja össze az 1. táblázat.

3.6. Összefoglalás

Ebben a fejezetben három rendezetlen kvantum spinlánc (transzverzális terű Ising lánc, szoros kötésű modell, antiferromágneses XX lánc) Griffith-McCoy szingularitásait tanulmányoztuk. A központi jelentőségű mennyiség az alacsony energiájú állapotossűrűség, ami a három modell esetén ugyanannak a közös problémának a megoldásaként kapható meg. A három modell esetén ugyanis az energiaszintek ugyanis nem mások, mint egy páros-páratlan aszimmetriával rendelkező tridiagonális véletlen mátrix sajátértékei. A Dyson-Schmidt technikát alkalmazva kiszámoltuk a megfelelő állapotossűrűséget a spektrum közepén, felhasználva az Eggartertől és Riedingertől származó *véletlen bolyongássá alakítás* ötletét [48]. Eredményünk érvényes a teljes Griffiths fázisban, szemben a korábbi kifejezésekkel, amik csak a kritikus pontban [48], illetve a gyengén rendezetlen Griffiths fázisban helytállóak [49]. A várakozásunknak megfelelően a Griffiths fázisban a dinamikai exponens a kritikus ponttól való távolságot mérő kontrollparaméter folytonos függvényének adódott. Megoldásunkat összevetettük az erősen rendezetlen renormalizációs csoport (SDRG) technikával, amivel azonos alakot kaptunk a dinamikai exponensre, a kontrollparaméter függvényeként. Ez a tény tovább erősíti azt a széleskörűen elfogadott sejtést, hogy amennyiben dinamikai mennyiségeket tekintünk, az SDRG eljárás messze a kritikus ponton túl is aszimptotikusan egzakt eredményeket szolgáltat. Azt várjuk, hogy ez hasonlóan igaz marad minden olyan rendszerre is, amikor a rendszer viselkedését erősen rendezetlen fixpont vezérli.

4. Termodinamikai szingularitások

4.1. Bevezetés és célkitűzések

Nullahőmérsékletű kvantum fázisátalakulások esetén rendezetlen rendszerekben a termodinamikai mennyiségek Griffiths-McCoy szingularitásokat mutatnak. Az előző fejezetben egzaktul meghatározott $n(E)$ állapotsűrűség ismerete ezek kiszámításához már elegendő. Ebben a fejezetben az így kapott eredményeinket vetjük össze a skálameggondolásokból kapható alakokkal.

4.2. Termodinamikai szingularitások a kapott egzakt állapotsűrűség alapján

Munkánk során a félig betöltött rendezetlen szoros kötésű modellt, rendezetlen antiferromágneses XX-láncot és RTFIC rendszert tekintettük, amelyeknek az alacsony energiás viselkedését szabad fermion reprezentációban az alábbi közös alakokkal írhatjuk le:

$$\mathcal{H}_F = \sum_q E_q (\eta_q^+ \eta_q - 1/2) , \quad (45)$$

ahol E_q a q -edik sajátértékét jelöli a korábban bevezetett \mathcal{M} mátrixnak (16), valamint η_q^+ (η_q) fermion keltő (eltüntető) operátorok. Az alapállapot energiáját leosztva a lánc méretével, azaz a spinenkénti alapállapot energiával:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2L} \sum_q E_q = -\frac{1}{2} \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} n(E) E \, dE . \quad (46)$$

A spinenkénti szabadenergia a \mathcal{Z} állapotösszeg alapján:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -k_B T \ln \mathcal{Z} = -\frac{k_B T}{L} \sum_q \ln \left[2 \operatorname{ch} \left(\frac{E_q}{2k_B T} \right) \right] = \\ &= -k_B T \left\{ \ln 2 + \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} n(E) \ln \left[\operatorname{ch} \left(\frac{E}{2k_B T} \right) \right] dE \right\} , \end{aligned} \quad (47)$$

ahol L a lánc hossza. A szabadenergiából megkaphatjuk a belső energiát:

$$\mathcal{E}(T) = \mathcal{F} - T \frac{d\mathcal{F}}{dT} = -\frac{1}{2} \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} n(E) E \operatorname{th} \left(\frac{E}{2k_B T} \right) dE , \quad (48)$$

valamint a fajhőt:

$$c_v(T) = \frac{d\mathcal{E}(T)}{dT} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} n(E) \left(\frac{E}{2k_B T} \right)^2 \left[\text{ch} \left(\frac{E}{2k_B T} \right) \right]^{-2} dE. \quad (49)$$

Az állapotsűrűség meghatározott alakja alapján a skálázási eredményekkel (12) összhangban:

$$c_v(T) \propto \mathcal{A} T^{1/z} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{1/z+1} \text{ch}^{-2} \varepsilon d\varepsilon. \quad (50)$$

Megjegyezzük, hogy a (50)-beli előfaktor, \mathcal{A} arányos $\xi^{-1}z^{-1}$ -nel, azaz a gyengén rendezetlen Griffiths fázisban $\mathcal{A} \sim \delta^3$, $\delta \ll 1$, ami megegyezik az SDRG eredményekkel [34, 35].

A továbbiakban részletesen is megvizsgáljuk a rendezetlen antiferromágneses XX-lánc esetét, ahol (19) bevezetünk egy plusz, homogén mágneses teret leíró tagot: $H \sum_i S_i^z$. Fermion operátorokkal kifejezve ez a tag $H/2 \sum_i (c_i^+ c_i - 1/2)$ alakú, azaz így \mathcal{M} már diagonális elemeket is tartalmaz: $\mathcal{M}_{i,i} = H/4$, $\forall i$. Ennek következtében az energiaszintek eltolódnak $E \rightarrow E + H/4$. A mágneszettséget deriválással kaphatjuk:

$$m(H, T) = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H} \sim \int_{-H/4}^{H/4} n(E) \text{th} \left(\frac{E}{2k_B T} \right) dE \quad (51)$$

ahol felhasználtuk azt a tényt, hogy \mathcal{M} spektruma (16) szimmetrikus $E = 0$ körül. Nulla hőmérsékleten $m(H, 0)$ szinguláris kis H esetén:

$$m(H, 0) \sim N(H/4) - N(-H/4) \sim H^{1/z} \quad (52)$$

ugyanúgy, ahogyan (13)-ben is. A (51)-beli integrált kiszámolva kis H és T esetére, de $H/T = \mathcal{O}(1)$ megkötéssel az alábbi eredményt kapjuk az alacsony hőmérsékleti szuszceptibilitásra:

$$\chi(T) \sim T^{1/z-1}, \quad (53)$$

ami megfelel a (12)-beli skálaalaknak.

4.3. Összefoglalás

Ebben a fejezetben három rendezetlen kvantum spinlánc (transzverzális terű Ising lánc, szoros kötésű modell, antiferromágneses XX lánc) Griffith-McCoy szingularitásait tanulmányoztuk. Elmondhatjuk, hogy a termodinamikai mennyiségeket kiszámítva a skálahipotézis képleteivel összhangban álló eredményeket kaptunk. A kifejezésekben megjelenő exponensek értékét az $E = 0$ körüli állapotsűrűség előző fejezetben megadott egzakt kifejezésének köszönhetően a teljes Griffiths fázisban sikerült meghatároznunk. Módszerünkkel a fajhő esetén az előfaktor kontrollparamétertől való függését is feltártuk, ami ugyanannak adódott, mint az SDRG eljárással kiszámított eredményben. A rendezetlen antiferromágneses XX-lánc esetén kitértünk a külső, homogén mágneses tér szerepére is.

5. Kapcsolat a Sinai modell és a transzverzális terű Ising lánc között

5.1. Bevezetés és célkitűzések

A *Sinai modell* - azaz véletlen bolyongás véletlen közegben - intenzíven kutatott terület. Mind a matematikusok [56], mind a fizikusok [57] sok eredményt értek el az utóbbi kb. 30 évben. A fizikusok számára két okból is jelentős ez a modell. Az első szempont, hogy egy olyan egyszerű, időfüggetlen, ún. folytott rendezetlenséget tartalmazó dinamikai modell, amiben egzaktul tárgyalható sok, komplexebb rendszerben megfigyelhető jelenség. Másodszor különböző helyeken szolgáltat jó leírást a fizikában, így például a doménfalak mozgásában az RTFIC esetén, vagy távolabbi példaként a DNS szétnyílásakor külső erő jelenlétében [58] .

A Sinai modellre számos eredmény áll rendelkezésünkre, így például folytonos esetben egzaktul ismert az adott energia alatti állapotok száma [59]. Ehhez járul az a tény, hogy az RTFIC modell és a Sinai modell diszkrét változatának spektruma között egyértelmű matematikai megfeleltetés áll fent [41]. Ezek alapján célul tűztük ki az RTFIC modell állapotsűrűségének kiszámítását a Griffiths fázisban, abban bízva, hogy megkapjuk ugyanazt az egzakt skálázási eredményt, mint a Dyson-Schmidt eljárás esetében. Mivel a Sinai modell állapotsűrűsége teljes pontossággal ismert, azt reméltük, hogy túlmenve a Dyson-Schmidt eljárás eredményén a képletekben szereplő előfaktorokat is megkaphatjuk.

5.2. A Sinai bolyongás és a kapcsolódó eredmények

A folytonos Sinai modellt az alábbi Langevin egyenlet definiálja:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\gamma} F[x(t)] + \eta(t) . \quad (54)$$

Ahol $\eta(t)$ rövid autokorrelációs idejű, Gauss típusú *termikus zaj*, amit egyértelműen megadhatunk az első két kumulánsával:

$$\overline{\eta(t)} = 0 , \quad (55)$$

$$\overline{\eta(t)\eta(t')} = 2\frac{k_B T}{\gamma}\delta(t-t') ; \quad (56)$$

ahol a fölülvonás a termikus átlagolást jelöli és γ a közegellenállási együttható. A *fluktuáció-disszipáció tétellel* összhangban, rendezetlenség hiányában a diffúziós együttható

$$D_0 = \frac{k_B T}{\gamma} . \quad (57)$$

A Sinai modellben az inhomogén közeget időfüggetlen, folytott rendezetlenséggel vesszük figyelembe. Az ezt realizáló F eloszlása szokásosan szintén Gauss alakú, azonban általában nem zérus várható értékkel:

$$\langle F(x) \rangle = F_0 \quad (58)$$

$$\langle F(x)F(x') \rangle - F_0^2 = \sigma\delta(x-x') \quad (59)$$

ahol a $\langle \dots \rangle$ jelöli a rendezetlenség feletti átlagolást. Ez a modell származtatható az alábbi diszkrét probléma határeseteként, ahol az i rácsponton álló részecske $i+1$ rácspontra való átugrásának a valószínűsége $w_{i,i+1}$, míg az $i-1$ rácspontra $w_{i,i-1} = 1 - w_{i,i+1}$. Annak a valószínűsége, hogy a részecske az i rácsponton található a t időpontban $P_i(t)$, aminek az időfejlődését megadó vezéregyenlet:

$$\frac{dP_i}{dt} = w_{i-1,i}P_{i-1} - (w_{i,i-1} + w_{i,i+1})P_i + w_{i+1,i}P_{i+1} . \quad (60)$$

A folytonos határeset akkor kapható meg, ha

$$w_{n+1,n} = \frac{D_0}{a^2} \exp\left(-a\frac{F_{n+1}}{2k_B T}\right) . \quad (61)$$

$$w_{n,n+1} = \frac{D_0}{a^2} \exp\left(a\frac{F_{n+1}}{2k_B T}\right) ; \quad (62)$$

ahol a a rácsállandó.

Az E energia alatti állapotok száma a folytonos esetben ismert [59]:

$$N(E) = \frac{\sigma}{2D_0^2\pi^2} \frac{1}{J_\mu(\sqrt{\epsilon})^2 + N_\mu(\sqrt{\epsilon})^2} , \quad (63)$$

ahol

$$\epsilon = 16\frac{D_0^3}{\sigma^2}E , \quad (64)$$

valamint a J_μ és N_μ Bessel függvények indexében megjelenő μ -t az alábbi képlet definiálja:

$$\left\langle \left(\frac{w_{n,n+1}}{w_{n+1,n}} \right)^\mu \right\rangle = 1 . \quad (65)$$

Ebben az esetben μ értéke:

$$\mu = \frac{2F_0 kT}{\sigma} . \quad (66)$$

5.3. A paraméterek megfeleltetése a két modell között

A diszkrét Sinai modellt véges méretű, elnyelő határfeltételekkel tekintve a két probléma sajátértékegyenletei azonos alakúnak adódnak [41] az alábbi megfeleltetéssel:

$$J_i = (w_{i+1,i})^{1/2} , \quad h_i = (w_{i,i+1})^{1/2} . \quad (67)$$

Így már érthetővé válik, hogy a (66) egyenletben miért a korábban már használt μ (66) jelöli a kitevőt. Jelölje az RTFIC k -adik energia sajátértékét E_k , míg a Sinai modell esetében e_k , ezekre az adódik, hogy

$$E_k^2 = -e_k , \quad (68)$$

ahol $e_k < 0$. A Sinai modell esetén a rendezetlenség mértékét

$$\delta_{\text{walk}} = \frac{[\ln w_{\leftarrow}]_{\text{av}} - [\ln w_{\rightarrow}]_{\text{av}}}{\text{var}(\ln w_{\leftarrow}) + \text{var}(\ln w_{\rightarrow})} \quad (69)$$

méri, ami megegyezik a kvantumláncok esetében látott δ kontrollparaméterrel (2). A kifejezésben szereplő w_{\rightarrow} jelöli a $w_{i,i+1}$ értékeket a lehetséges i helyeken, hasonlóan w_{\leftarrow} a $w_{i-1,i}$ értékek helyettesítésére szolgál.

5.4. Az Ising lánc állapotsűrűségének kiszámítása

Esetünkben az

$$x = -e_k = \sqrt{E_k} \quad (70)$$

jelöléssel élve ismert a $\rho(x^2)$ sűrűségfüggvény és keressük $\rho(x)$ -et. Felhasználva, hogy egy x valószínűségi változó $f(x)$ függvényének sűrűségfüggvénye:

$$\rho(f(x)) = \sum_{a, f(a)=f(x)} \frac{\rho(a)}{\left| \frac{\partial f(a)}{\partial a} \right|} \quad (71)$$

figyelembe véve a parabola mindkét ágát azt kapjuk, hogy:

$$\rho(x) = x\rho(x^2) . \quad (72)$$

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért $E_k \equiv E$ jelöléssel élünk. Az E energia alatti állapotok száma

$$k \equiv N(E_k) \equiv N(E) . \quad (73)$$

A számításokban fontossá válik majd az az eset, amikor az adott $E = x^2$ energia alatti állapotok száma hatványfüggvény alakba írható:

$$N(x^2) = \gamma x^\alpha , \quad (74)$$

azaz

$$N(E) = \gamma E^{\alpha/2} . \quad (75)$$

Ekkor az állapotsűrűség

$$\rho(x^2) = \gamma \frac{\alpha}{2} E^{\alpha/2-1} \quad (76)$$

és

$$\rho(x) = \gamma \frac{\alpha}{2} x^{\alpha-1} . \quad (77)$$

A számításokhoz a diszkrét Sinai modellbeli $N(E)$ lenne szükséges, azonban azt csak folytonos határesetben ismerjük (63). Mivel a folytonos határesetbeli eredmény kiterjesztése a diszkrét modellre nem egyértelmű, a továbbiakban megkíséreljük a folytonos határesetbeli (63) kifejezés közvetlen alkalmazását. Így várhatóan csak ott kaphatunk helyes eredményt, ahol a korrelációs hossz lényegesen nagyobb a rácscellánál, azaz a kritikus pontban és a gyengén rendezetlen Griffiths fázisban. Az állapotok számát kifejező (63) egyenletben megjelenő Bessel függvényeket az egyes tartományokban a közelítő

alakjaikkal helyettesítve az állapotsűrűség mindkét tartományban hatványfüggvény alakú lesz. Így a számolások leegyszerűsödnek és lehetővé teszik a felmerülő problémák jobb megértését.

A Bessel függvények közelítő alakja kis argumentum mellett, azaz ha $0 < x \ll \sqrt{\mu+1}$

$$J_\mu(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\mu \quad (78)$$

$$N_{\mu=0}(x) \rightarrow \frac{2}{\pi} [\ln(x/2) + \gamma] \quad (79)$$

$$N_{\mu \neq 0}(x) \rightarrow \frac{-\Gamma(\mu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\mu. \quad (80)$$

Míg nagy argumentumnál, azaz ha $x \gg |\mu^2 - 1/4|$:

$$J_\mu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\mu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (81)$$

$$N_\mu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\mu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (82)$$

Ahol $\gamma \approx 0,5772$ az Euler-Mascheroni állandó, $\Gamma(x)$ pedig a gammafüggvény. Megjegyezzük, hogy a fenti kifejezések $\mu = 1/2$ esetén egzaktak. Ezek alapján egyszerűen felírhatjuk a lépcsőfüggvény aszimptotikus alakjait a Griffiths fázisban (ahol $\mu \neq 0$):

- Ha x elegendően nagy, azaz $\sqrt{\epsilon} = 4 \frac{D_0^{3/2}}{\sigma} x \gg |\mu^2 - 1/4|$, akkor

$$N(E) = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{D_0\pi}}, \quad (83)$$

visszakaptuk a μ -független szabad spektrumot, ami megfelel az előzetes várakozásunknak, hiszen folytonos esetben rövid időkre szabadon diffundál a részecske. (77)

alapján leolvashatjuk, hogy $\alpha = 1$ és $\gamma = \frac{1}{\sqrt{D_0\pi}}$, így

$$\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{D_0\pi}}. \quad (84)$$

Nagy energiákra eszerint az RTFIC állapotsűrűsége konstans. Erre az eredményre a következő alfejezetben még részletesen visszatérünk.

- Ha x elegendően kicsi, azaz ha $4\frac{D_0^{3/2}}{\sigma}x \ll \sqrt{1+\mu}$, akkor

$$N(E) = CE^\mu, \quad (85)$$

ahol a (75) egyenletbeli $\alpha = 2\mu$ megfeleltetéssel, valamint bevezetve a $C = \gamma$ konstans:

$$C = \gamma = \frac{\sigma}{2D_0^2\Gamma(\mu)^2} \left(\frac{4D_0^3}{\sigma^2} \right)^\mu, \quad (86)$$

így

$$\rho(x) = C\mu x^{2\mu-1}. \quad (87)$$

5.4.1. Az állapotsűrűség normálásának kérdése

Az RTFIC állapotsűrűsége konstansnak adódott nagy energiákon, amiről rögtön látszik, hogy nem normálható. A termodinamikai számításokhoz a normált állapotsűrűségre van szükség, ehhez integrálni kell a kapott $\rho(x)$ -et. A két aszimptotikus alak ugyanazt az eredményt adja χ -nél:

$$\frac{1}{2\sqrt{D_0}\pi} = C\mu\chi^{2\mu-1}, \quad (88)$$

így

$$\chi = C\mu 2\sqrt{D_0}\pi^{\frac{1}{1-2\mu}}. \quad (89)$$

Az integrál kontrollálásához bevezethetünk egy alsó (ω) és felső (Ω) levágást. Így figyelembe véve a negatív energiákat is $\rho(x)$ integrálja:

$$Z = C\chi^{2\mu} - C\omega^{2\mu} + \frac{\Omega}{\sqrt{D_0}\pi} - \frac{\chi}{\sqrt{D_0}\pi}, \quad (90)$$

ami divergál, ha $\Omega \rightarrow \infty$. Az itt látottal szemben fizikailag természetes, hogy folytonos helyett a diszkrét esetben számolva a véges rácsállandó miatt a fenti konstans függvényalaknak le kell vágnia.

5.5. Termodinamikai mennyiségek számítása

Az elvégzendő termodinamikai integrálok alakja a következő:

$$I = 4k_B T \int_{\omega/2k_B T}^{\chi/2k_B T} \frac{\rho(\epsilon 2k_B T)}{Z} f(\epsilon) d\epsilon + 4k_B T \int_{\chi/2k_B T}^{\Omega/2k_B T} \frac{\rho(\epsilon 2k_B T)}{Z} f(\epsilon) d\epsilon \quad (91)$$

azaz

$$I = 2(2k_B T)^{2\mu} \frac{C\mu}{Z} \int_{\omega/2k_B T}^{\chi/2k_B T} \epsilon^{2\mu-1} f(\epsilon) d\epsilon + \frac{4k_B T}{\sqrt{D_0} \pi Z} \int_{\chi/2k_B T}^{\Omega/2k_B T} f(\epsilon) d\epsilon \quad (92)$$

A megjelenő $f(\epsilon)$ szorzófaktor általában nem cseng le elég gyorsan, így a nagy energiás levágás nem ismert részletei jelentős hatással vannak a végeredményre. A fajhő $c_v(T)$ esetén azonban szerencsénk van, hiszen ott (49):

$$f(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{\text{ch}^2 \epsilon} . \quad (93)$$

Így ha T elég kicsi, akkor csak a Bessel függvények kis argumentuma melletti sorfejtésből származik járulék. Az $\omega \approx 0$ helyettesítéssel élve

$$c_v(T) = 2(2k_B T)^{2\mu} \frac{C\mu}{Z} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{2\mu+1}}{\text{ch}^2 \epsilon} d\epsilon \quad (94)$$

ahol az integrál értéke $\ln 2 + \mathcal{O}(\mu)$, így

$$c_v(T) = 2 \ln 2 \frac{C\mu}{Z} (2k_B T)^{2\mu} (1 + \mathcal{O}(\mu)) . \quad (95)$$

Emlékeztetőül (86):

$$C = \frac{\sigma}{2D_0^2 \Gamma(\mu)^2} \left(\frac{4D_0^3}{\sigma^2} \right)^\mu . \quad (96)$$

Az ebben a közelítésben nagynak adódó Z normálási tényező valódi értékére várhatóan teljesül, hogy μ hatványai szerint sorbafejtve, a döntő járulékot a μ -független tag adja. Esetünkben $\mu = \delta + \mathcal{O}(\delta^2)$, így a fajhőben megjelenő előfaktor kontrollparamétertől való függése a $C\mu$ szorzatból származik. A gammafüggvény nulla körül divergál, reciproka pedig $1/\Gamma(\mu) \sim \mu$ alakú $\mathcal{O}(\mu^2)$ korrekcióval. A C -ben megjelenő többi tényező hatása ennél sokkal gyengébb, így a fajhő előfaktora vezető rendben $\sim \delta^3$ alakú. Ugyanezt az eredményt kaptuk a Dyson-Schmidt technikával is a fajhőre a (50) egyenletben. Tehát a gyengén rendezetlen Griffiths fázisban a Dyson-Schmidt technikával és a Sinai bolyongásra alapozott megfeleltetéssel nyert eredmény is összhangban van az SDRG eredményekkel.

5.6. Összefoglalás

A Sinai modellre számos eredmény áll rendelkezésünkre, így például folytonos esetben egzaktul ismert az adott energia alatti állapotok száma [59]. Mint láttuk, az RTFIC és a Sinai modell diszkrét változatának spektruma között egyértelmű matematikai megfeleltetés áll fent [41]. Ezek alapján célul tűztük ki az RTFIC modell állapotsűrűségének kiszámítását a Griffiths fázisban, abban bízva, hogy ugyanazt az egzakt skálaalakot kapjuk, mint a Dyson-Schmidt eljárás esetében. Figyelembe véve, hogy a Sinai modell állapotsűrűsége pontosan ismert, azt reméltük, hogy túlmenve a Dyson-Schmidt eljárás eredményén a képletekben szereplő további előfaktorok értékét is meghatározhatjuk.

Mivel az állapotsűrűség meghatározásához szükséges összefüggést csak a Sinai modell folytonos határesetében ismertük, aminek a diszkrét esetre való kiterjesztésének részleteitől jelentősen függhetnek a termodinamikai mennyiségek, csak a fajhő esetében sikerült ezzel a megközelítéssel konzisztens, számszerű eredményt is elérni. Előzetes várakozásainknak megfelelően a skálaalak ugyanannak adódott, mint a Dyson-Schmidt technika és az SDRG eljárás esetében. Hasonlóan, az előfaktor kontrollparamétertől való vezető rendű függésére is ugyanazt a hatványfüggvény alakot kaptuk. Reményeinkkel ellentétben a fajhő kifejezésében megjelenő előfaktor további részleteit ezzel a módszerrel sem sikerült pontosabban meghatározni.

6. Transzverzális terű Ising lánc vizsgálata numerikus renormalizációval

6.1. Bevezetés és célkitűzések

Mivel a 2.4. fejezetben megismert RTFIC kritikus viselkedését végtelen rendezetlenségi fixpont dominálja [34, 35], az SDRG eljárás kiváló eszközt jelent a tanulmányozására [60]. Az anizotrop, rendezetlen kétdimenziós klasszikus rendszerek széles osztályának kritikus viselkedését az RTFIC renormalizációs fixpontja határozza meg. Példaként említhetjük meg a kétdimenziós Ising modellt, illetve az irányított perkolációt réteges szerkezetű rendezetlenség esetén. Munkánk során a központi jelentőségű RTFIC modellben számított mágnesezettség sűrűségeloszlásának a vizsgálatát tűztük ki célul a kritikus pontban.

Motivációnkat ehhez a perkoláció esetén a legnagyobb, perkoláló klaszter sűrűségprofiljára elért konform térelméleti eredmények jelentették. Természetesen az erősen anizotrop, rendezetlen rendszerünkre nincsenek konform térelméleti eredmények, azonban a perkoláció esetén már rendelkezésünkre állnak az analóg eloszlásfüggvények [61]. A perkoláció esetén vizsgált perkoláló klaszter sűrűségfüggvénye ismert, amivel az RTFIC esetén az utolsó SDRG spinklaszter mágnesezettség profilja állítható párhuzamba. Mivel az (egydimenziós) RTFIC esetén egzaktul ismerjük a mágneses kritikus exponenseket (5), a perkolációra vonatkozó képletekben szereplő exponensek alkalmas lecserélésével analóg kifejezéseket kaphatunk az eloszlásfüggvények alakjára a konform térelméleti eredmények alapján. Ez a felvetés kissé meglepőnek tűnhet, azonban a Potts-modell esetén már beigazolódott [10], ugyanis az ott vizsgált ún. Fortuin-Kasteleyn klaszterek sűrűségfüggvényét hibahatáron belül leírják az így nyert analóg kifejezések.

A rendszer vizsgálatához először az SDRG eljárás numerikus implementációjára volt szükség. Az eredménye egy gyors program lett [62], ami közvetlenül alkalmazható a későbbiekben tetszőleges dimenziójú, tetszőleges geometriájú rendszerekre. Habár az izotrop rendezetlen rendszerek esetén az átlagolt mennyiségek eloszlását várhatóan megkaphatjuk a konform térelmélet segítségével, az általunk vizsgált időfüggetlen rendezetlenséget mutató RTFIC modell az anizotrop McCoy-Wu-modell [63, 64, 65]

kvantummechanikai változata, amiben izgalmas kérdés, hogy teljesül-e a fenti állítás.

Azért, hogy a mágnesezettség eloszlása ne legyen teljesen homogén, olyan elrendezéseket vizsgálunk, amiknek van határa⁶. Munkánk során a spinlánc két végét tekintve szabad-szabad, illetve rögzített-szabad és rögzített-rögzített határfeltételek melletti rendszer vizsgálatát tűztük ki célul. A vizsgált sűrűségeloszlásra vonatkozó eredmények korábbról nem ismertek, így különösen fontossá vált, hogy numerikus eljárásunk helyességét ellenőrizni tudjuk más, de szorosan kapcsolódó ismert eredmények reprodukálásával. Ezért első lépésként az ismert skálaeredmények - beleértve magát a skálaalakot és az exponensek értékét is - ellenőrzését tűztük ki célul.

A numerikus analízishez szükséges a kritikus pont helyzetének ismerete, ami csak a periodikus határfeltételekkel ellátott lánc esetén teljesülő *dualitási transzformáció* fixpontjaként áll elő. A rendszer *duálisában* az eredeti rendszerbeli minden spin helyére csatolást teszünk és fordítva, minden csatolás helyére spint. Periodikus határfeltételű lánc esetén a rendszer duálisa egy ugyanolyan szerkezetű, periodikus határfeltételű lánc lesz. Az SDRG eredmények alapján elmondhatjuk, hogy ha a logaritmikus csatolások és a logaritmikus terek várható értéke megegyezik, akkor a rendszer statisztikus értelemben ekvivalens a duálisával, azaz a dualitási transzformáció fixpontjában vagyunk. A számunkra fontos szabad vagy rögzített határfeltételek esetén a spinek és csatolások száma nem egyezik meg, a dualitás sérül a felületen, így a kritikus pont helyzete nem ismert egzaktul. A felület hatása azonban a részarányának megfelelő mértékében a mérettel gyorsan lecseng, így egy L hosszú mintán a kritikus pont helyzete $\mathcal{O}(1/L)$ pontossággal ismert. Az ebből adódó hiba csökkentésének érdekében munkánk során igyekeztünk a lehető legnagyobb méretű rendszereket vizsgálni.

Megjegyezzük, hogy az általunk megalkotott és általánosan alkalmazható program ellenére azért is maradtunk az egydimenziós esetnél, mert magasabb dimenzióban nem ismert a kritikus pont helyzete a paraméterterben. Ekkor ugyanis a csatolások száma lényegesen nagyobb lehet a spinek számánál, így a dualitásra alapozott megfontolás egyáltalán nem alkalmazható.

⁶Nyilván a szokásos periodikus határfeltételek melletti lánc nem felel meg erre a célra.

6.1.1. Konform térelméleti eredmények

Az itt bemutatandó eredmények kétdimenziós perkolációra vonatkoznak egy véges szélességű, de végtelen hosszú szalag alakú mintán, rögzített határfeltételek mellett [61]. Számunkra a szalagot keresztező klaszterek tanulmányozása érdekes. Ezek eloszlása $\rho_b(l/L)$, ami annak a valószínűsége, hogy a szalag hosszára merőlegesen mért l helyen levő pont beletartozik egy olyan klaszterbe, ami mindkét határt érinti. A továbbiakban az összefüggések egyszerűbb alakja érdekében gyakran az $y = l/L$ jelöléssel fogunk élni. Folytonos határesetben a perkolációra $l \gg 1$, $L \gg 1$ és $y = l/L$ esetén a $\rho_b(y)$ sűrűség ismert konform térelméleti eredmény:

$$\rho_b(y) \propto (\sin \pi y)^{-x_b} \left[\left(\cos \frac{\pi y}{2} \right)^{x_s} + \left(\sin \frac{\pi y}{2} \right)^{x_s} - 1 \right], \quad (97)$$

ahol $x_b = 5/48$ és $x_s = 1/3$ a perkoláció skáladimenziói [66].

Most tekintsük azokat a klasztereket, amik az egyik határt érintik, például $y \rightarrow 0$ esetén, de a másikat nem kell, hogy érintsék. Ezek sűrűsége, $\rho_0(l/L)$, a konform térelméleti eredmények alapján perkolációra [61]:

$$\rho_0(y) \propto (\sin \pi y)^{-x_b} \left(\cos \frac{\pi y}{2} \right)^{x_s}. \quad (98)$$

Végül azokat a klasztereket tekintjük, amik legalább az egyik határt tartalmazzák, azaz amelyekben benne van a $l = 1$ vagy a $l = L$ határ, vagy akár mindkettő. Ezek sűrűsége $\rho_e(l/L)$, ami konform térelméleti számolások alapján perkolációra:

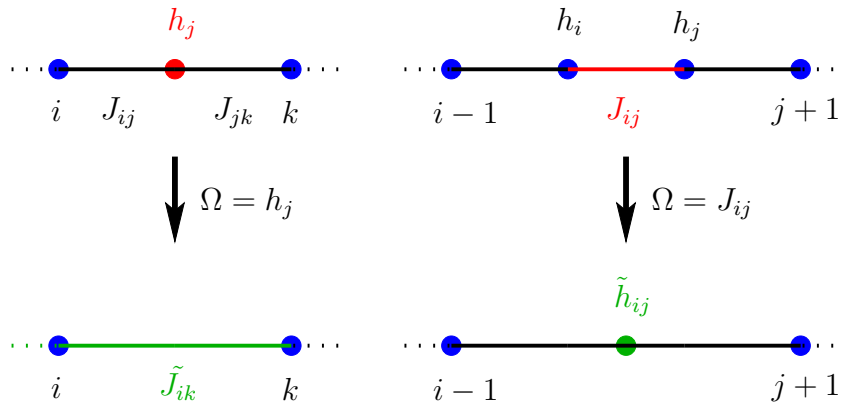
$$\rho_e(y) \propto (\sin \pi y)^{-x_b}, \quad (99)$$

ami analóg a rendparaméterprofillal mindkét végén rögzített határfeltételekkel [67]. A konform térelméleti jóslatok esetén a fentiek alapján fennáll a $\rho_b(y) = \rho_0(y) + \rho_1(y) - \rho_e(y)$ kapcsolat, ahol $\rho_1(y) = \rho_0(1 - y)$. Megjegyezzük, hogy perkoláció esetére ezek az elméleti jóslatok tökéletes összhangban vannak a numerikus eredményekkel [61], míg a Potts modell esetén is jó egyezést mutatnak [10]. A Potts modell esetén a statisztika sajnos nem olyan jó, ugyanis csak a mindkét határt érintő merőleges metszeteket figyelembe véve, azok a végpont-végpont korrelációnak megfelelően csak $\sim L^{-2x_s} \sim L^{-1}$ hányadát alkotják az

összes esetnek [10]. A perkoláció esetében kapott képletekben a skáladimenziók RTFIC-beli értékére áttérve analóg kifejezéseket kaphatunk az RTFIC esetére. A következőkben az így kapott kifejezéseket vetjük majd össze a diszkrét esetre vonatkozó eredményekkel. A folytonos esetben kirótt határfeltétel helyzetét $a = \mathcal{O}(1)$ méri a diszkrét modellben, amivel a finomhangolásnál használt $y = (l + a)/(L + 2a)$ alakú lesz. Az a paraméter változtatásával általában jobb egyezés érhető el a diszkrét és folytonos modell között [61]. A továbbiakban minden numerikus és elméleti görbe úgy normált, hogy $\int_0^1 \rho(y)dy = 1$ legyen.

6.2. Az alkalmazott renormalizációs technika

A B. Függelékben részletesebben is bemutatott SDRG eljárást [3, 68, 69] sikerrel alkalmazták rendezetlen kvantum rendszerek vizsgálatára, ahol a renormalizációs lépéseket iterálva a rendszer egy ún. *végtelen rendezetlenségi fixpontba* jut a kritikus pontban [3]. Később kiderült, hogy az eljárás a kritikus ponton kívül, azaz a Griffiths fázisban is aszimptotikusan egzakt eredményeket szolgáltat. A transzformáció egyenletei analitikusan is felírhatóak, azonban a csatolt integro-differenciál egyenletrendszer megoldása általában nem könnyű feladat. Ennek ellenére sok analitikus eredménnyel büszkélkedhet a terület [34, 35]. Ebben a fejezetben csak az alapkoncepciót és a numerikus megvalósítás lépéseit ismertetjük. Az eljárás alapelve abban rejlik, hogy fokozatosan eltüntetni a rendszerből a legnagyobb



4. ábra. Az alkalmazott numerikus renormalizáció lépései a rendezetlen transzverzális terű Ising lánc esetén. Bal oldalon: ha a h_j külső tér adja az Ω maximális energiaskálát, akkor a spinklasztert eltávolítjuk és egy effektív $\tilde{J}_{ik} = J_{ij}J_{jk}/h_j$ csatolással helyettesítjük a szomszédos spinek között. Jobb oldalon: ha a J_{ij} csatolás adja a maximális energiaskálát, akkor az általa összekötött két spinből egy új spinklasztert formálunk, ami egy $\tilde{h}_{ij} = h_i h_j / J_{ij}$ külső terű effektív spinként jelenik meg a rendszerben.

lokális energiaskálával jellemezhető részeket, azaz a leggyorsabb módusokat. Egy adott lé-

pésben az energiaskálát az aktuálisan jelenlévő csatolások és külső terek maximuma adja meg $\Omega = \max\{J_i, h_i\}$. A következő lépésben az Ω értékű külső teret (klaszter decimálás), vagy csatolást (klaszter formálás) fogjuk eliminálni. Ezeknek a lépéseknek köszönhetően az eljárás végére a rendszerből a csatolások és spinek elfogynak, egyetlen effektív spin jellemzi az egész rendszert, miközben az energiaskála egyre csökken. Az erősen rendezetlen renormalizációs eljárás további részletei a B. Függelékben találhatóak meg. Az előforduló kétféle transzformációs lépés (4. ábra):

- Klaszter decimálás: ha külső tér (például $h_j \gg J_{ij}, J_{jk}$) adja a maximális energiaskálát, akkor a spinklasztert eltávolítjuk és egy effektív csatolással helyettesítjük a szomszédos spinek között. Az effektív csatolás értéke másodrendű perturbációs számítás alapján $\tilde{J}_{ik} \approx J_{ij}J_{jk}/h_j$. Ha a decimált spinklaszter történetesen a nyitott lánc végén helyezkedik el, akkor nem jelenik meg új effektív csatolás. Magasabb dimenzióban a helyzet annyiban különbözik, hogy a decimált spin szomszédjai közé páronként hasonlóan generálódik egy új, effektív csatolás.
- Klaszter formálás: ha csatolás (például $J_{ij} \gg h_i, h_j$) adja a maximális energiaskálát, akkor az általa összekötött két spinből egy új spinklasztert formálunk, ami egy effektív spinként jelenik meg a rendszerben. Az effektív ($\tilde{\mu}_{ij}$) spin mágneses momentuma a két spin mágneses momentumának összege lesz, azaz $\tilde{\mu}_{ij} = \mu_i + \mu_j$. Másodrendű perturbációs számítással számolva az új spin effektív külső tere

$$\tilde{h}_{ij} \approx h_i h_j / J_{ij}. \quad (100)$$

6.3. Skálatörvények ellenőrzése Ising lánc esetén numerikus renormalizációval

Végtelen méretű rendszerrel az SDRG lépéseket ismételve az energiaskála egyre csökken és elérve a fixpontba $\Omega^* = 0$ lesz. A fixpontban a renormalizációs egyenleteket egzaktul meg lehet oldani, így például az előálló spinklaszterek (eredeti rendszerben vett ekvivalens) hossza az alábbi módon skálázik [34, 35]:

$$\ell \sim \ln(\Omega/\Omega_0)^2, \quad (101)$$

ahol Ω_0 egy viszonyítási skála, például a kezdeti energiaskála. Ehhez hasonlóan véges, L méretű rendszer esetén is teljesül (C.1. fejezet), hogy

$$\ln \Omega \sim L^{-1/2} . \quad (102)$$

Az átlagos mágneses momentum skálázása [34, 35]:

$$\mu \sim \ln (\Omega / \Omega_0)^\Phi , \quad \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} . \quad (103)$$

Véges L méretű rendszer esetén ismert a felület átlagos mágnesezettségének méretfüggése is (4):

$$[m_s]_{\text{av}}(L) \sim L^{-1/2} . \quad (104)$$

Mielőtt a skálaalakokra ismert összefüggéseket tárgyalnánk, érdemes kitérni a következő érdekes tényre. *Összefüggő spinrendszer esetén a rögzített (azaz $h_i = 0$ külső térű) (határ)spin mindig benne lesz a legutolsó spinklaszterben.* Összefüggő spinrendszer alatt olyan geometriájú rendszert értünk, ahol bármelyik spinből eljuthatunk bármelyik spinbe nemnulla erősségű csatolásokon át haladva, azaz ahol a rendszer *gráfja* összefüggő. Ennek belátásához az alábbi három állítást kell figyelembe venni:

- Az SDRG eljárás során összefüggő gráfból kiindulva minden lépésben eggyel csökken az (effektív) spinek száma, de a gráf összefüggő marad. Az eljárás végére a rendszer egyetlen összekapcsolt spinpárrá redukálódik, ami pedig egyetlen eredő spinné, függetlenül attól, hogy az utolsó lépésben a csatolás vagy az egyik külső tér volt a legerősebb.
- A $h = 0$ -ás, rögzített spint sosem decimáljuk ki, hiszen mindig a legnagyobb értékű csatolásokat szüntetjük meg. Mielőtt eljutnánk a rögzített spin decimálásához, az összefüggő komponensbeli összes csatolást decimáljuk kell, azaz már csupán egyetlen spin lehet a rendszerben.
- Ha a $h = 0$ -ás, rögzített spin egyik csatolása a maximális, akkor spinklasztert formálunk a két érintett spinből. Ekkor a létrejövő spinklaszter a (100) egyenlet alapján örökli a $h = 0$ tulajdonságot.

Így tehát összefüggő spinrendszer esetén mindig marad az eljárás legvégén egy $h = 0$ -ás effektív spin, amiben benne van az összes korábbi rögzített spin is. Tehát beláttuk azt

az állítást, hogy összefüggő spinrendszer esetén a rögzített spinek mind részei lesznek az utolsó spinklaszternek.

A továbbiakban először az ismert skálázási alakokat ellenőrizzük le az általunk implementált numerikus SDRG eljárás keretein belül három esetben, különböző határfeltételek mellett. A mágnesezettség sűrűségeloszlásának vizsgálata során elvégezzük a határok közelében várható skálaalakok ellenőrzését is.

6.3.1. Végpont-végpont korreláció méretfüggése

Ebben a fejezetben a szabad-szabad, illetve rögzített-szabad és rögzített-rögzített határfeltételekkel vizsgáljuk a végpontok korrelációjának mértékét, azaz annak a valószínűségét, hogy a két végpont ugyanabban a spinklaszterben található meg. Hasonlóan ahhoz, ahogy a perkoláció esetén is a legnagyobb, perkoláló klaszter eloszlására ismertek az eredmények, mi is csak az SDRG eljárás legvégén előálló, utolsó spinklasztert vesszük számításba. A továbbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy adott realizációs szám mellett hányszor szerepel mindkét végpont a legutolsó spinklaszterben.

A mágnesezettségre vonatkozó skálaalakokat az alábbiakban foglaljuk össze.

- Szabad-szabad határfeltételek: A (104) összefüggés alapján az egyik határt tartalmazó spinklaszterek valószínűsége $\sim L^{-x_s} = L^{-1/2}$, így a végpont-végpont korrelációt megadó, azaz mindkét határt tartalmazó spinklaszterek valószínűsége:

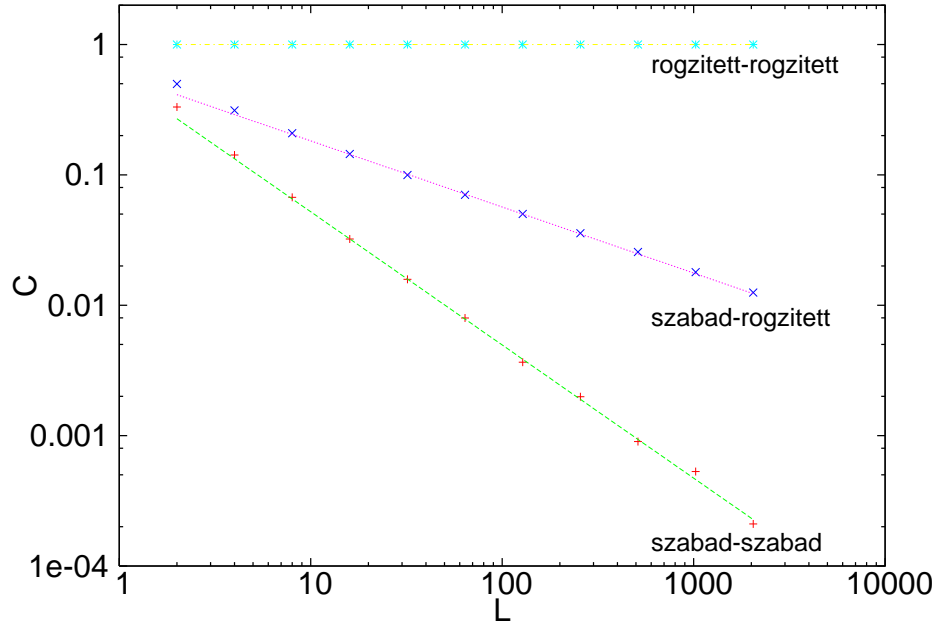
$$C \sim L^{-2x_s} \sim L^{-1} . \quad (105)$$

- Rögzített-szabad határfeltételek: Mivel a rögzített határ mindig szerepel az utolsó spinklaszterben, a végpont-végpont korrelációt a másik, szabad határ fogja meghatározni, azaz a korreláció értéke:

$$C \sim L^{-x_s} \sim L^{-1/2} . \quad (106)$$

- Rögzített-rögzített határfeltételek: Ekkor mindkét határ szerepel az utolsó spinklaszterben, tehát a korreláció megegyezik a realizációk számával a mérettől függetlenül.

A fenti összefüggések 100000 realizációra átlagolva már jól teljesülnek (az 5. ábra).



5. ábra. Végpont-végpont korreláció (C) méretfüggése. RTFIC lánc esetén azon realizációk valószínűségét tüntettük fel, amelyekben mindkét határspin együtt szerepel a legutolsó SDRG spinklaszterben. Legfelül a mindkét végén rögzített esetben látható, hogy valóban az összes (100000) realizációban benne vannak az utolsó spinklaszterben. Középen rögzített-szabad határfeltétel mellett az illesztett hatványfüggvény kitevője jó közelítéssel egyezik a várttal $-0,51 \pm 0,01 \approx -x_s = -0,5$ (106). Alul szabad-szabad határfeltételek esetén szintén jó közelítéssel teljesül a várt skálázás a $-1,02 \pm 0,02 \approx -2x_s = -1$ kitevővel (105).

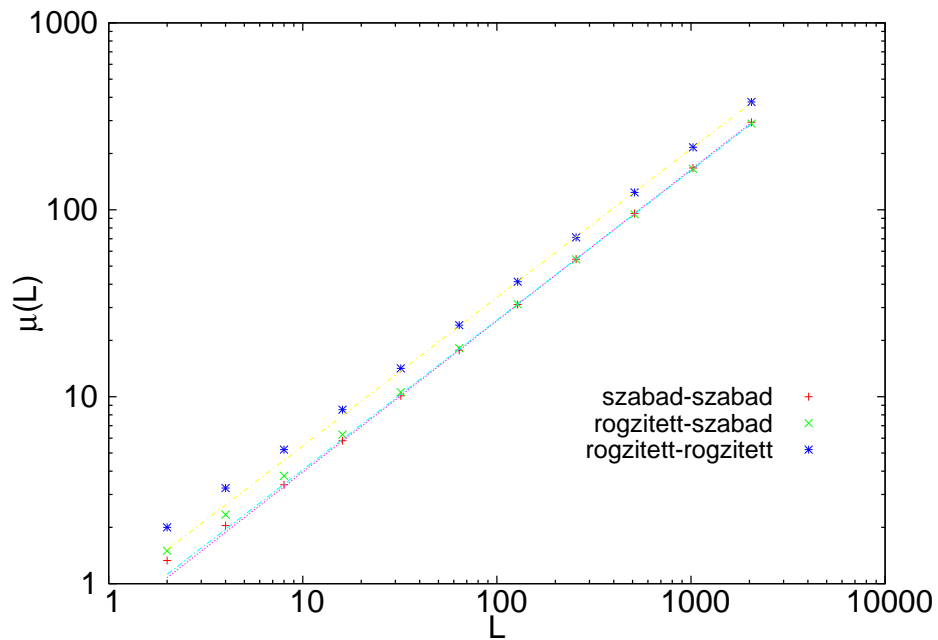
6.3.2. A mágnesezettség méretfüggése

Ebben a fejezetben a szabad-szabad, illetve rögzített-szabad és rögzített-rögzített határfeltételek mellett vizsgáljuk a rendszer eredő mágnesezettségét, azaz az SDRG eljárás által előállított legutolsó effektív spin mágneses momentumát.

Összevetve a (102) és (103) egyenleteket azt kapjuk, hogy véges, L méretű láncot renormalizálva az utolsó spinklaszter mágnesezettsége

$$\mu(L) \sim L^{\Phi/2} \sim L^{0,809} . \quad (107)$$

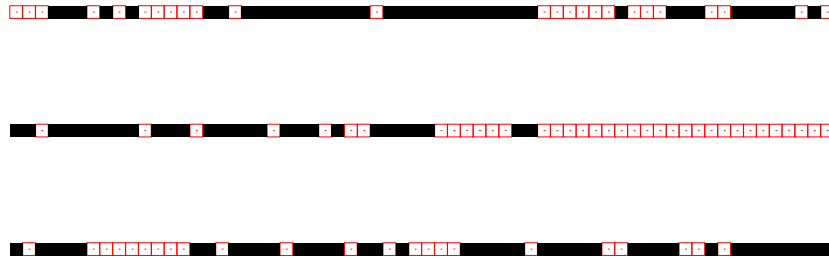
Várakozásunknak megfelelően ez az összefüggés jól teljesül az összes határfeltétel esetén (6. ábra).



6. ábra. Az RTFIC mágnesezettségének méretfüggése a háromfajta határfeltétel mellett 100000 realizációra átlagolva. Az illesztett hatványfüggvény kitevője mindhárom esetben jól egyezik a várt $\Phi/2 \approx 0,809$ -del. A kitevők értéke: szabad-szabad határfeltétel $0,809 \pm 0,001$; rögzített-szabad határfeltétel $0,801 \pm 0,006$; rögzített-rögzített határfeltétel $0,794 \pm 0,007$.

6.4. Az Ising lánc mágnesezettségének sűrűségfüggvénye

Azok a spinek, amik az utolsó spinklaszterbe kerülnek az eljárás során, bár erősen korreláltak⁷, általában nem alkotnak összefüggő domént, ahogy az a 7. ábra példáin is szembe-tűnő. Nagyszámú realizációt tekintve azonban megvizsgálhatjuk ezek sűrűségfüggvényét, azaz annak a valószínűségét⁸, hogy egy adott helyen lévő spin belekerül ebbe az utolsó spinklaszterbe. A numerikus vizsgálatok során a csatolások és külső terek ugyanabból az



7. ábra. Szabad határfeltételek melletti SDRG eredmények $L = 64$ -es méret mellett. A végső spinklaszterbeli spinek feketével vannak jelölve. Fent: egy tipikus utolsó spinklaszter. Középen: utolsó spinklaszter, ami tartalmazza az $\ell = 1$ -as határt. Lent: utolsó klaszter, ami mindkét határt ($\ell = 1$ és $\ell = L$) tartalmazza.

egyenletes eloszlásból származtak, ami $p(u) = 1$, ha $0 \leq u \leq 1$ és $p(u) = 0$, ha $u > 1$. Ezzel a választással biztosítottuk is, hogy teljesül a (3) feltétel, azaz a kritikus pontban vagyunk. Az SDRG eljárást minden esetben addig folytattuk, amíg már csak az utolsó spinklaszter maradt a rendszerben és az ehhez tartozó eredeti spinek eloszlását tekintettük. Az itt bemutatott eredmények az SZFKI Kísérleti Szilárdtestfizikai Osztályának számítógépklaszterén (192 processzor) készültek kb. fél nap leforgása alatt.

- Szabad határfeltételek esetén az SDRG hagyományaihoz képest⁹ is nagyszámú (3×10^7) realizációt tekintettünk annak érdekében, hogy a kis valószínűségű ($\sim 1/L$), mindkét határt tartalmazó utolsó spinklaszterű realizációk is elegendően nagy számban legyenek képviselve. A véges méret effektusok minimalizálása érdekében a rendszer méretét is nagyra $L = 2^{13} = 8192$ választottuk.
- Rögzített határfeltételek esetén az összes realizáció tartalmazni fogja a megfelelő határ(oka)t (6.3.1. fejezet), így kevesebb realizáció is elegendően pontos eredményt

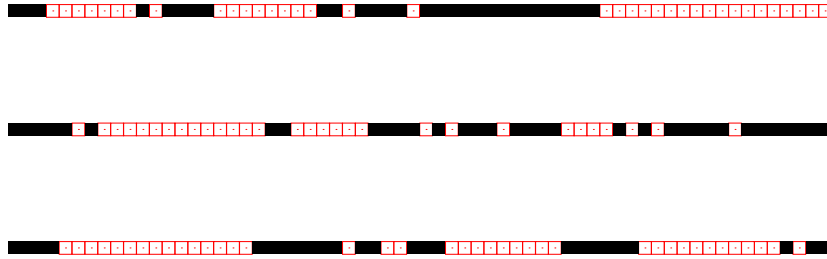
⁷Az említett korreláció időfüggetlen, folytott rendezetlenségre történő átlagolás esetén a képzetes időirányban jelenik meg ezek között a spinek között.

⁸Az adott feltételek, pl. határfeltételek mellett.

⁹Tipikusan $\sim 10^5$ realizáció.

ad. Ebben az esetben $1,5 \times 10^7$ realizációt tekintettünk. A véges méret effektusok minimalizálása érdekében és a szabad határfeltételek mellett végzett számításokkal való összehasonlíthatóságért itt is $L = 8192$ méretű rendszereket vizsgáltunk.

Mielőtt rátérnénk a következő fejezetre, itt újból megjegyezzük, hogy a rendszer nem konform invariáns és így ezekre sűrűségeloszlásokra nem is ismert analitikus eredmény. Munkánk során a perkolációra vonatkozó konform eredményekből kapható analóg kifejezések érvényességét vizsgáltuk az RTFIC esetén.



8. ábra. Rögzített határfeltételek melletti SDRG eredmények $L = 64$ -es méret mellett. A végső spinklaszterbeli spinek feketével vannak feltüntetve. Fent: rögzített-szabad határfeltételek melletti utolsó spinklaszter, ami az $\ell = 1$ -es határt érinti, de az $\ell = L$ -es határt nem. Középen: rögzített-szabad határfeltételek melletti utolsó spinklaszter, ami az $\ell = 1$ -es és $\ell = L$ -es határt is érinti. Lent: rögzített-rögzített határfeltételek melletti utolsó spinklaszter, ami az $\ell = 1$ -es és $\ell = L$ -es határt is tartalmazza. Ahogy azt a szövegben bebizonyítottuk, a rögzített határspin mindig része az utolsó spinklaszternek.

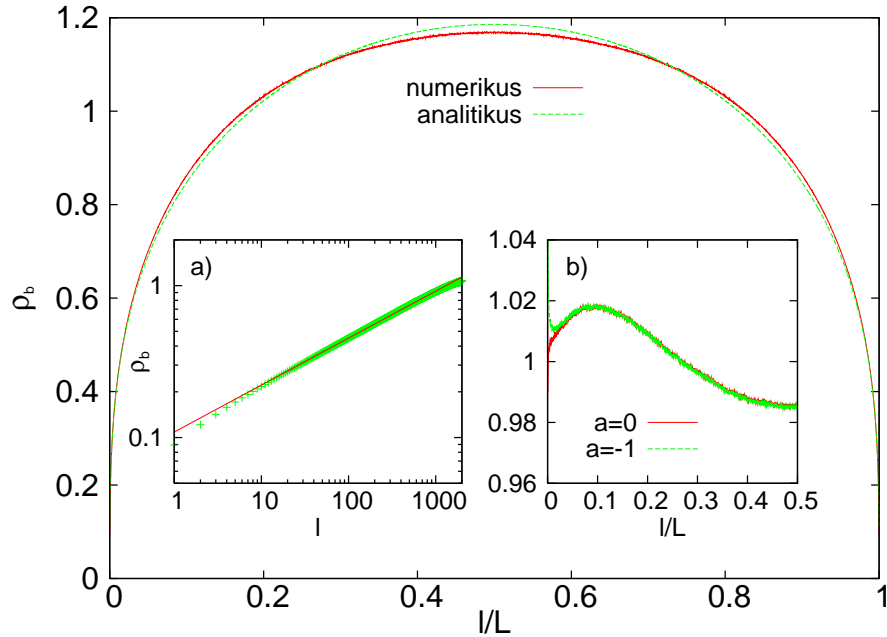
6.4.1. Szabad határfeltételek

Szabad határfeltételek esetén a határok szempontjából háromfajta végső spinklasztert vizsgáltunk (7. ábra). Az összes végső spinklaszter eloszlását (7. ábra legfelső része) $\rho(l/L)$ adja meg. Azokat a végső spinklasztereket tekintve, amik az $l = 1$ határt tartalmazzák (7. ábra középső része) $\rho_0(l/L)$ -t kapjuk meg. A mindkét (azaz $l = 1$ és $l = L$) határt tartalmazó végső spinklaszterek (lásd a 7. ábra alsó része) eloszlását $\rho_{01}(l/L)$ adja meg. Az összes végső spinklaszter eloszlása a 9. ábrán látható. Mivel a rendszer szimmetrikus, a statisztika javítása érdekében a kapott numerikus görbét szimmetrizáltuk és így tüntettük fel az ábrán. A határokhoz közel skálameggondolások alapján azt várjuk, hogy

$$\rho(y) \sim y^{x_s - x_b}, \quad y \ll 1 \tag{108}$$

$$\rho(\ell) \sim \ell^{x_s - x_b}, \quad \ell \ll L. \tag{109}$$

Ezek a meggondolások nagy pontossággal teljesülnek (9. ábra b) része). A b) ábrarészen a könnyebb összehasonlíthatóság kedvéért feltüntettük az $y^{x_s-x_b}$ alakot¹⁰ is. A megfelelő skálaalakot a (97) egyenlet elégíti ki, ezért ezt vetettük össze a numerikus adatokkal. Az ábra a) részén feltüntettük a numerikus és a (97) egyenlet által leírt analitikus alak hányadosát is. Ezen már kis, kb. 1% nagyságrendű eltérések fedezhetőek fel az egységtől. Ezek alapján tehát a (97) egyenlet egy jó közelítés, de valószínűleg nem tekinthető az egzakt eredménynek.



9. ábra. Az összes végső spinklaszter sűrűségeloszlása az RTFIC esetén, numerikus SDRG eljárással meghatározva (piros vonal). A zöld vonal a (97) egyenlet által megadott alak. Részábrák: a) a határhoz közeli sűrűségeloszlás mindkét tengelyen logaritmikus ábrázolásban, valamint a skálahipotézis jóslatának (108) megfelelő meredekségű egyenes; b) a numerikus és az analitikus (97) eredmények hányadosa a felülettől való relatív távolság függvényében. Az analitikus kifejezésben a határ illesztésére szolgáló a paraméter változtatása láthatóan csekély hatással van a végeredményre.

Az $l = 1$ -es határt tartalmazó végső spinklaszterek eloszlása látható a 10. ábrán. Skálameggondolások alapján a határokhoz közel az alábbi alakokat várjuk:

$$\rho_0(\ell) \sim \ell^{-x_b}, \quad \ell \ll L, \quad (110)$$

$$\rho_0(L - \ell) \sim (L - \ell)^{x_s - x_b}, \quad L - \ell \ll L. \quad (111)$$

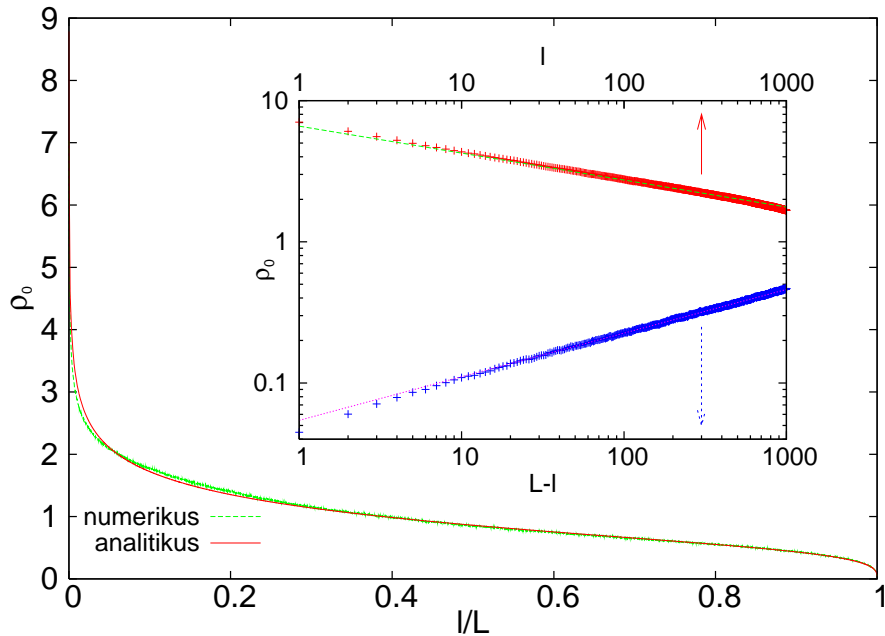
¹⁰Ennek a képe a mindkét tengelyen logaritmikus skála miatt egyenes.

Ezek az alakok jól teljesülnek (10. ábra részábrája). Ezt az aszimptotikus viselkedést tudja a (98) egyenlet, ami azonban az $y \sim 1$ szélén túl nagy, kb. kétszeres eredményt ad. Sokkal jobb egyezést kaphatunk az alábbi kifejezéssel:

$$\rho_0(y) \propto (\sin \pi y)^{-x_b} \left[\left(\cos \frac{\pi y}{2} \right)^{x_s} - \left(\sin \frac{\pi y}{2} \right)^{x_s} + 1 \right], \quad (112)$$

ami nem más mint az átlaga azon klaszterekre vonatkozó konform analóg eredményeknek, amik tartalmazhatják, vagy nem tartalmazzák a másik határt [61]. Az eredmények minden y esetén közel esnek ehhez a kifejezéshez, de az egyezés nem tökéletes (10. ábra).

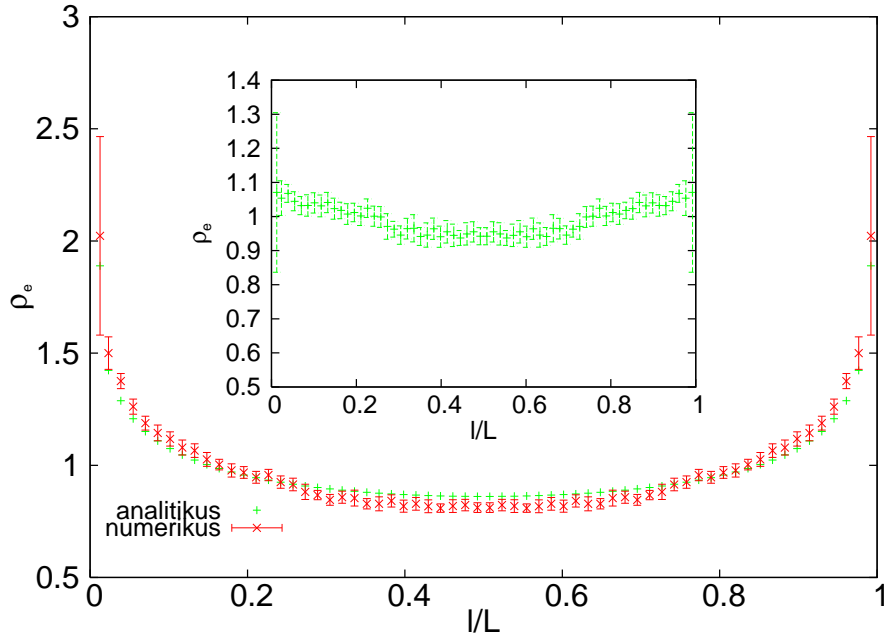
Megjegyezzük, hogy a (98) egyenlet önmagában semmiképpen sem lehet jó, ugyanis nagyméretű rendszerek esetén a mindkét határt érintő klaszterek aránya zérushoz tart ($\sim 1/L$), így az $l = 1$ -es határt érintő klaszterek sűrűségének és az $l = L$ -es határt érintő klaszterek sűrűségének önmagában ki kell adnia az összes klaszter sűrűségét (97), ami erősen sérül. Ezzel szemben a (112) egyenlet esetén ez a feltétel már teljesül.



10. ábra. Az $l = 1$ falat érintő végső spinklaszterek eloszlása az RTFIC esetén, numerikus SDRG eljárással számolva. A zöld vonal a (112) egyenlet által megadott görbe. Részábra: sűrűségeloszlás a határok közelében mindkét tengelyen logaritmikus ábrázolásban, rajta a megfelelő skálalakoknak megfelelő görbékkel (110).

Végül azokat a spinklasztereket tekintjük, amik mindkét határt érintik. A megfelelő sűrűségeloszlás $\rho_{01}(y)$ a rögzített-rögzített határfeltételek melletti rendparaméter-eloszlás

megfelelője, aminek az alakja perkoláció esetén ismert (99). A numerikusan kapott eloszlás a 11. ábrán látható. Mivel a felületi spinek csupán $\sim L^{-1/2}$ valószínűséggel szerepelnek az utolsó klaszterben, az összes klaszternek csak a $\sim L^{-1}$ hányada tartamazza mindkét felületet. Az alkalmazott méret ($L = 8192$) mellett erős lokális fluktuációk jelentkeznek. Ezek csökkentése érdekében mind a numerikus, mind az analitikus eredményekből $d = 128$ -as beosztású hisztogramot készítettünk. A (99) egyenlettel összevetve az eredményeket az egyezés jó, de nem tökéletes. A numerikus és elméleti alakok hányadosa néhány százalékos eltérést mutat, ahogy az a 11. ábra részábráján látható.



11. ábra. A mindkét határt érintő végső spinklaszterek eloszlása az RTFIC esetén, numerikus SDRG eljárással számítva. Az adatpontok $d = 128$ spinre átlagolt értékeket tüntetnek fel az ilyen nagy méretű rendszerekben ($L = 8192$) elkerülhetetlenül jelenlévő nagy lokális fluktuációk hatásának csökkentésére. A zöld vonal a (99) egyenlet által megadott görbét mutatja. Részábra: a numerikus és analitikus (99) sűrűségfüggvények aránya.

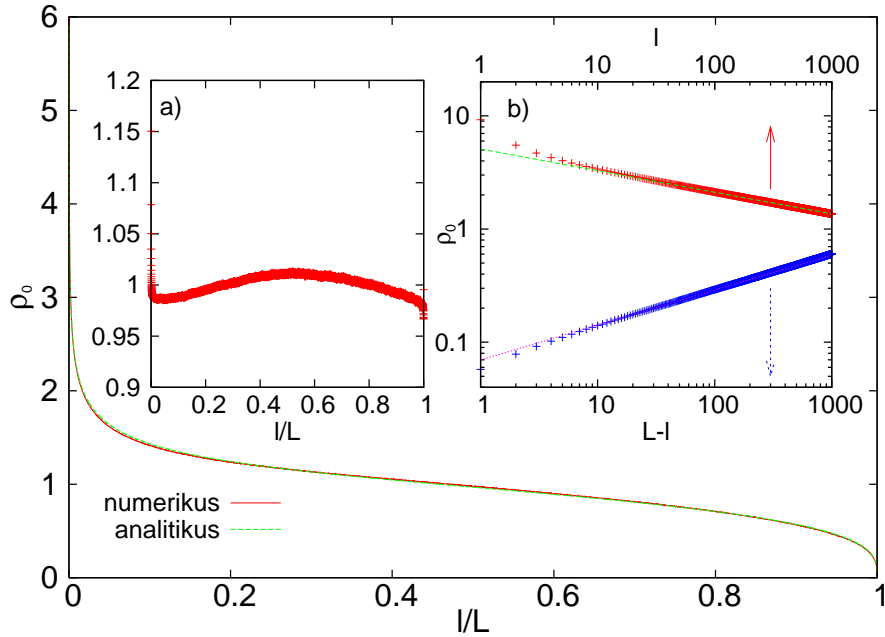
6.4.2. Egy rögzített és egy szabad határfeltétel esete

A 8. ábra felső két mintája erre az esetre szolgáltat egy-egy példát. Az $l = 1$ határon rögzített határfeltételt ($h_1 = 0$) alkalmazunk, aminek következtében ez a határ mindig benne van az utolsó SDRG spinklaszterben. Skálameggondolások alapján a határokhoz közel az alábbi alakokat várjuk:

$$\rho(l) \sim l^{-x_b}, \quad l \ll L, \quad (113)$$

$$\rho(L - l) \sim (L - l)^{x_s - x_b}, \quad L - l \ll L. \quad (114)$$

Megjegyezzük, hogy ezek megegyeznek a szabad-szabad határfeltétel esetén érvényes alakokkal, amikor kikötjük, hogy az utolsó spinklaszternek tartalmaznia kell az $l = 1$ -es határt. Ezek az alakok jól teljesülnek (12. ábra b) részábrája). Ezt az aszimptotikus viselkedést adja a (98) egyenlet, ami most a 12. ábrán láthatóan a szabad-szabad határfeltétel esetével ellentétben valóban jól illeszkedik a numerikus eredményekre. Az eloszlások minden y esetén közel esnek, de az egyezés ebben az esetben sem tökéletes.



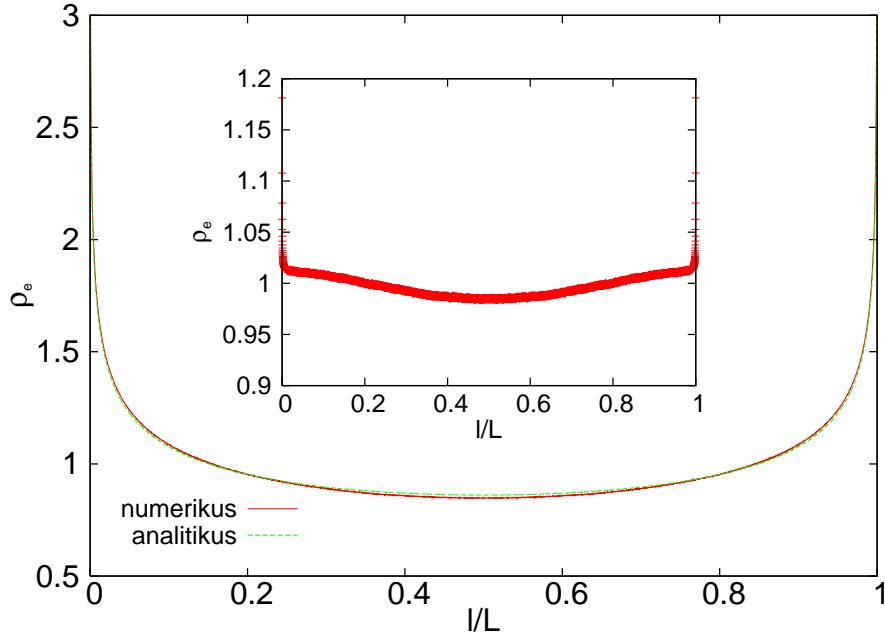
12. ábra. Az RTFIC mágnesezettségének eloszlása egy rögzített ($l = 1$) és egy szabad ($l = L$) határfeltétel mellett. A zöld vonal a (98) egyenlet által megadott görbe. a) a numerikus és a (98) egyenlet által megadott alak hányadosa. b) sűrűségeloszlás a határok közelében mindkét tengelyen logaritmikus ábrázolásban, rajta az egyes skálalakoknak megfelelő görbékkel (113).

Megjegyezzük, hogy az $l = 1$ -es határon rögzített, de az $l = L$ -es határon szabad határfeltétel esetén az $l = L$ -es határt (is) tartalmazó spinklaszterek eloszlása erősen aszimmetrikus. Ez azt mutatja, hogy a látott hasonlóság ellenére komoly különbség van aközött, hogy egy szabad határt tartalmaz a legutolsó spinklaszter, vagy egy határt amiatt tartalmaz a legutolsó spinklaszter, mert ott rögzített határfeltételt írtunk elő.

6.4.3. Két rögzített határfeltétel esete

Ekkor az összes utolsó spinklaszter tartalmazza mind a két határt (8. ábra legalsó minta), ami miatt nagyfokú hasonlóságot várunk a szabad-szabad határfeltételek melletti mindkét határt tartalmazó spinklaszterekkel (11. ábra). A megfelelő sűrűségeloszlás $\rho_{01}(y)$ várható-

an a rögzített-rögzített határfeltételek melletti rendparaméter-eloszlás megfelelője, aminek az alakja perkoláció esetén ismert (99). A numerikusan kapott eloszlás a 13. ábrán látható. A (99) egyenlettel összevetve az eredményeket, jó, de nem tökéletes egyezést kaptunk. A numerikus és elméleti alakok hányadosa néhány százalékos eltérést mutat (13. ábra részábrája).



13. ábra. Az RTFIC lánc mágnesezettségének eloszlása mindkét végén rögzített határfeltételek mellett, numerikus SDRG eljárással számítva. A zöld vonal a (99) egyenlet által megadott görbét mutatja. Részábra: a numerikus és analitikus (99) sűrűségfüggvények aránya.

6.5. Összefoglalás - numerikus eredmények az Ising lánc esetén

2. táblázat. Az egyes képletek érvényessége a perkoláció, illetve az RTFIC modell esetén. A táblázatban az egyes képletek esetére látható, hogy melyik felület van benne a vizsgált klaszterben. Az Ising lánc esetén a határfeltételek rövidítésében az R a rögzített, az SZ pedig a szabad határfeltételt jelöli. Megjegyezzük, hogy a rögzített határ automatikusan szerepel az utolsó klaszterben.

kifejezés	perkoláció	RTFIC
$(\sin \pi y)^{-x_b} \left[\left(\sin \frac{\pi y}{2} \right)^{x_s} + \left(\cos \frac{\pi y}{2} \right)^{x_s} - 1 \right]$	mindkét felület	SZ-SZ
$(\sin \pi y)^{-x_b}$	legalább az egyik felület	SZ-SZ mindkét felület, R-R
$(\sin \pi y)^{-x_b} \left[\left(\cos \frac{\pi y}{2} \right)^{x_s} \right]$	legalább az $l = 1$ -es felület	R-SZ
$(\sin \pi y)^{-x_b} \left[1 - \left(\sin \frac{\pi y}{2} \right)^{x_s} \right]$	csak az $l = 1$ -es felület	–
$(\sin \pi y)^{-x_b} \left[1 - \left(\sin \frac{\pi y}{2} \right)^{x_s} + \left(\cos \frac{\pi y}{2} \right)^{x_s} \right]$	–	SZ-SZ legalább az $l = 1$ -es felület

Munkánk során a központi jelentőségű RTFIC modell mágnesezettség sűrűségének eloszlását vizsgáltuk meg a kritikus pontban. Numerikus eredményeinket az általunk leprogramozott erősen rendezetlen renormalizációs technika segítségével értük el. A kapott eloszlásokat összevetve az ismert skálázási eredményekkel minden esetben jó egyezést kaptunk. Az eloszlások önmagukban is érdekesek, azonban igyekeztünk analitikus jóslatokat is tenni. Ehhez a perkolációra vonatkozó konform térelméleti eredmények jelentették a kiindulást, amelyekből származtatható analóg kifejezések hibahatáron belül megegyeznek a rendezetlen Potts modellbeli numerikus eloszlásokkal. Az erősen anizotrop RTFIC esetén az előállított analóg összefüggések jó becslésnek bizonyultak mind szabad-szabad, rögzített-szabad és rögzített-rögzített határfeltételek mellett (azonban az egyezés nem tökéletes). Az egyes képletek érvényességét a perkolációra, illetve az RTFIC modellre a 2. táblázatban foglaltuk össze. Láthatóan sok a hasonlóság az azonos függvényalakokkal (a megfelelő modell kritikus exponenseivel) jól leírható esetek között, azonban előfordulnak olyan helyzetek is, aminek nincs a másik modellben megfelelője. Az általunk vizsgált nagy méretű és szokatlanul nagyszámú realizációnál tekintett rendszerekben az analóg kifejezésekkel összevetve a numerikus eredményeket néhány százalékos eltérést figyeltünk meg.

7. Összefoglalás

A rendezetlen rendszerekben jelentkező kvantum fázisátalakulásokat még kevésbé értjük, mint a jól ismert termikus fázisátalakulásokat. A dolgozatban a legegyszerűbb egydimenziós eset vizsgálatára szorítkoztunk, ahol a legerősebben látható az eltérés a szokásos fizikától. Ahol a megközelítési mód lehetővé tette, együtt kezeltük a magasabb dimenziós, illetve az általános geometriájú rendszereket is az egydimenziós esettel. A kvantum fluktuációk, a megjelenő erős korrelációk, valamint a rendezetlenségi fluktuációk összjátékának eredménye a termodinamikai mennyiségek és a dinamikai korrelációs függvények erős szingularitása [1, 2, 3]. A jelenség szokatlan módon kiterjed a kvantum kritikus régió kívülre is (az ún. Griffiths fázisra), ahol a térbeli korrelációk már rövid hatótávolságúak [3, 4]. A jelenség eredete, ahogy arra Griffiths rámutatott [5], azokban a ritka régiókban rejlik, ahol az erős kötések véletlenül, extrém fluktuációknak köszönhetően felhalmozódnak.

Munkánk során kidolgoztunk egy egyszerű, közvetlen számolási módot, amivel egzakt eredményeket kaptunk a megjelenő Griffiths-McCoy szingularitásokra a rendezetlen kvantum spinláncok egy családja esetén tetszőleges alakú rendezetlenség mellett. Ezen spinláncok közé tartozik a rendezetlen szoros kötésű, a rendezetlen antiferromágneses XX, valamint a rendezetlen transzverzális terű Ising lánc (RTFIC) is. Ezekben a modellekben az alacsony energiájú gerjesztések közös problémára vezettek: egy véletlen, nemnegatív elemekből álló tridiagonális szimmetrikus mátrix \mathcal{M} sajátértékproblémájára (16). Eredményünk érvényes a teljes Griffiths fázisban, szemben a korábbi kifejezésekkel, amik csak a kritikus pontban [48], illetve a gyengén rendezetlen Griffiths fázisban helytállóak [49]. Megoldásunkat összevetettük az erősen rendezetlen renormalizációs csoport (SDRG) technikával, amivel azonos kifejezést kaptunk a kontrollparaméter függvényeként a dinamikai exponensre. A három vizsgált modell közül a transzverzális terű Ising lánc (RTFIC) és a Sinai modell diszkrét változatának spektruma között egzakt matematikai összefüggés áll fent. Ez alapján számíthattuk ki a fajhő alakját a gyengén rendezetlen Griffiths fázisban, amire ugyanazt a skálázási eredményt kaptuk, mint az SDRG, illetve a Dyson-Schmidt eljárással. Hasonlóan, az előfaktor kontrollparamétertől való függésére is ugyanazt a hatványfüggvény alakot kaptuk. Ez a tény tovább erősíti a széleskörűen elfogadott sejtést: ha dinamikai mennyiségeket tekintünk, az SDRG eljárás messze a

kritikus ponton túl is aszimptotikusan egzakt eredményeket szolgáltat. Azt várjuk, hogy ez hasonlóan igaz marad minden olyan rendszerre is, amikor a rendszer viselkedését erősen rendezetlen fixpont vezérli.

Végül a központi jelentőségű RTFIC modell mágnesezettségének sűrűségeloszlását vizsgáltuk meg a kritikus pontban. Numerikus eredményeinket az általunk implementált erősen rendezetlen renormalizációs technika segítségével értük el. A kapott eloszlásokat összevetve az ismert skálaeredményekkel minden esetben jó egyezést kaptunk. Az eloszlások önmagukban is érdekesek, azonban igyekeztünk analitikus jóslatokat is tenni, amihez a perkolációra vonatkozó konform térelméleti eredmények jelentették a kiindulást. Az RTFIC esetén az előállított analóg összefüggések jó becslésnek bizonyultak mind szabad-szabad, rögzített-szabad és rögzített-rögzített határfeltételek mellett, azonban az egyezés nem tökéletes. Nagy méretű és nagyszámú realizáció mellett tekintett rendszerek esetén a numerikus eredményeket az analóg kifejezésekkel összevetve néhány százalékos eltérést figyeltünk meg.

A Griffiths-McCoy szingularitásokhoz hasonlóan a dolgozat második felében vizsgált mágnesezettség-profilra is azt várjuk, hogy a kvalitatív fizikai viselkedés az egydimenziós eseten túlmenve is hasonló marad, azonban magasabb dimenziós rendszerek esetén a megbízható kvantitatív meghatározás jelenleg még komoly kihívást jelent.

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretném megköszönni témavezetőm, *Iglói Ferenc* egyetemi tanár bizalmát, segítségét és útmutatását. Köszönettel tartozom *Heiko Riegernek* és csoportjának, amiért Saarbrückenben személyesen is betekintést nyerhettem kutatásaikba. Köszönöm *Cecile Monthusnak*, hogy felhívta a figyelmemet az Ising lánc és a Sinai bolyongás közötti szoros kapcsolatra, valamint *Pusztai Tamásnak*, hogy munkámhoz igénybe vehettem az SZFKI Kísérleti Szilárdtestfizikai Osztályának számítógépklaszterét.

Hálával tartozom *Tél Tamás* egyetemi tanárnak, amiért figyelmével és baráti jótanácsaival megtisztelt a témaválasztáshoz vezető úton. Végül köszönöm *Családomnak* és *Barátaimnak* a támogatásukat, amire mindig támaszkodhattam.

Quenched disorder has a profound effect on the low-energy, low-temperature and long wavelength properties of quantum systems. The interplay between quantum fluctuations, correlations and disorder fluctuations generally results in strong singularities of the thermodynamical quantities and in the (dynamical) correlation functions. This type of effect takes place even outside the quantum critical region, in the so called Griffiths-phase. The origin of this phenomenon, as pointed out by Griffiths, is due to rare regions, in which strong bonds are accumulated by extreme fluctuations. We used a direct and simple method to calculate exact values of the Griffiths-McCoy singularities in a class of random quantum spin chains, including the random tight-binding chain, the random antiferromagnetic XX-chain as well as the random transverse-field Ising chain (RTFIC). The low-energy excitations for each model have the same form: they are obtained from the eigenvalue problem of a symmetric tridiagonal matrix, with random entries. The Griffiths-McCoy singularities of the thermodynamic quantities are obtained from the density of states of the low-energy excitations, which is calculated exactly by the Dyson-Schmidt method. Relation between the Dyson-Schmidt technique and the strong disorder renormalization group method (SDRG) is also discussed. Using the relationship between the Sinai walk and the RTFIC the same result is obtained, thus our present study gives further credit to the conjecture that the SDRG method provides asymptotically exact results even far outside the critical point as far as dynamical quantities are considered.

In the second part we studied the density of critical clusters of the RTFIC, the fixed point of which is expected to control the critical behavior of a large class of 2 dimensional classical systems with anisotropic randomness. In these systems scaling at the critical point is strongly anisotropic, therefore these systems are not conformally invariant. The critical clusters of the RTFIC are defined through the SDRG procedure: spins in the final cluster, which have not been decimated out during renormalization are strongly correlated and play analogous role as clusters in percolation. The density of final clusters of the RTFIC close to the surfaces of the strip are shown to obey scaling relations. We also tried to find analytical formulae which correctly approximate the numerical profiles. These formulae, which are borrowed from similar studies of conformal systems have very good overall description, however we noticed a discrepancy of the order of a few percent.

A. Kesten-változók

A Kesten-változók természetes módon megjelennek a véletlen közegben történő véletlen bolyongás mennyiségeinek, valamint az RTFIC felületi mágnesezettségének [26, 71] számolása során is. Ebben a fejezetben a diszkrét Kesten-változókról [70] adunk áttekintést. Egy Kesten változó véletlen számok (y_i) szorzatainak összegeként írható fel:

$$Z_L \equiv \sum_{i=1}^L \prod_{j=1}^i y_j . \quad (115)$$

Az így bevezetett Kesten-változókat érdemes változó alsó határral is tekinteni:

$$Z(a, b) = \sum_{i=a}^L \prod_{j=1}^i y_j . \quad (116)$$

Így $Z(a, b)$ kielégíti az alábbi rekurzív relációt:

$$Z(a, b) = y_a \left[1 + Z(a, b) \sum_{i=1}^L \prod_{j=1}^i y_j \right] , \quad (117)$$

ahol y_a szorzótényezőként jelenik meg, tehát $Z(a, b)$ nem más, mint egy multiplikatív sztochasztikus folyamat. $Z(a, b)$ tanulmányozásának egyik fő eredménye, hogy abban a határesetben, ha a hossz $L = b - a$ végtelenhez tart, akkor a Z értékek eloszlása egy $P_\infty(Z)$ határeloszláshoz tart, amennyiben $[\ln y]_{\text{av}} < 0$. Ezen túl a határeloszlás aszimptotikus viselkedése is ismert nagy argumentumok esetén [53, 70, 72]:

$$P_\infty(Z) \underset{Z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{Z^{1+\mu}} , \quad (118)$$

ahol a μ kitevő értékét az $[y^\mu]_{\text{av}} = 1$ implicit egyenlet pozitív megoldása adja. Rendezetlen közegben történő véletlen bolyongásnál μ írja le az anomális diffúziót, ahol $x \sim t^\mu$, amennyiben $0 < \mu < 1$ [70, 73, 56]. Az RTFIC esetén μ az $1/z$ dinamikai exponenst jelenti.

Megjegyezzük, hogy a szakdolgozatban is alkalmazott SDRG eljárás Kesten változókat tartalmazó mennyiségek esetén egy nyeregpont-közelítésnek felel meg [74].

B. Az erősen rendezetlen renormalizációs csoport technika (SDRG)

A tiszta rendszerekkel szemben, ahol a renormalizáció szokásosan véges számú csatolást érint, a rendezetlen rendszerekben (végtelen dimenziós) eloszlásfüggvények transzformálódnak. Gyakran ez numerikus vizsgálatokhoz, vagy analitikus megközelítésekben véges dimenziós vetületek, illetve erősen megszorított függvényterek alkalmazásához vezet. Az erősen rendezetlen renormalizáció során nem élünk ilyen közelítésekkel, mégis vannak érdekes esetek, amikor elvégezhető a transzformációs egyenletek teljes elemzése. Az erősen rendezetlen renormalizációs megközelítést különböző fizikai rendszerekre dolgozták ki, így változatos algoritmusok képében jelenik meg. A különböző eljárások közös vonása hogy

- a renormalizáció egy véletlen változó extrém értékeit érinti, ez – a skálát meghatározó extrém érték – adja meg a renormalizált eloszlás levágását;
- a renormalizáció térben lokális, azaz csupán az extrém változó közvetlen szomszédjait érinti.

Az eljárás alapelve abban rejlik, hogy fokozatosan eltünteteti a rendszerből a legnagyobb lokális energiaskálával jellemezhető részeket, azaz a leggyorsabb módusokat. Egy adott lépésben az energiaskálát az aktuálisan jelenlévő csatolások és külső terek maximuma adja meg $\Omega = \max\{J_i, h_i\}$. A következő lépésben az Ω értékű külső teret (klaszter decimálás), vagy csatolást (klaszter formálás) fogjuk eliminálni. Ezeknek a lépéseknek köszönhetően az eljárás végére a rendszerből a csatolások és spinek elfogynak, egyetlen effektív spin jellemzi az egész rendszert, miközben az energiaskála egyre csökken. Az előforduló kétféle transzformációs lépés (4. ábra):

- Klaszter formálás: ha a J_{ij} csatolás adja a maximális energiaskálát, ahol $J_{ij} \gg h_i, h_j$, akkor az általa összekötött két spin erősen korrelált, aminek következtében egy longitudinális külső térben koherensen viselkednek. Jó közelítéssel tekinthetjük úgy ezt a spinpárt, mint egy összetett, effektív spint, aminek a $(\tilde{\mu}_{ij})$ mágneses momentuma a két spin mágneses momentumának összege lesz, azaz $\tilde{\mu}_{ij} = \mu_i + \mu_j$. Perturbációszámítással kiszámíthatjuk az új effektív spin effektív külső terét is. A két spint szabad határfeltételekkel tekintve a legalacsonyabb két energiaszint $E_0 = \sqrt{J_{ij}^2 + (h_i + h_j)^2}$, illetve $E_1 = \sqrt{J_{ij}^2 + (h_i - h_j)^2}$. Kis hibával eldobhatjuk a két magasabban fekvő

szintet, amik $\approx 2J_{ij}$ -vel vannak magasabban. A megtartott két alacsony energiájú állapotra úgy tekintünk, mint az effektív spin két lehetséges állapotára. A transzverzális külső tér renormalizált értéke ez alapján:

$$\tilde{h}_{ij} = \frac{E_1 - E_0}{2} \approx \frac{h_i h_j}{J_{ij}}, \quad (119)$$

ahol a második egyenlőség $J_{ij} \gg h_i, h_j$ esetén teljesül.

- Klaszter decimálás: ha h_j transzverzális külső tér adja a maximális energiaskálát, ahol $h_j \gg J_{ij}, J_{jk}$, akkor kis longitudinális külső térre ennek a spinnek elhanyagolható a válasza. Így ez a spin jó közelítéssel befagyottnak tekinthető, így a spinklasztert eltávolítjuk és egy effektív csatolással helyettesítjük a szomszédos spinek között. Az effektív csatolás értéke perturbációszámítással megkapható, de gyorsabban célhoz érünk a 6.1. fejezetben megismert dualitási transzformáció alapján. Eszerint \tilde{J}_{ik} képlete egyszerűen megkapható a spinklaszter formálás (119) kifejezéséből a $J \leftrightarrow h$ cserével. Így tehát

$$\tilde{J}_{ik} \approx \frac{J_{ij} J_{jk}}{h_j}. \quad (120)$$

Ha a decimált spinklaszter történetesen a nyitott lánc végén helyezkedik el, akkor nem jelenik meg új effektív csatolás. Magasabb dimenzióban a helyzet annyiban különbözik, hogy a decimált spin szomszédjai közé páronként hasonlóan generálódik egy új, effektív csatolás.

Így az új effektív csatolások és külső terek statisztikailag függetlenek lesznek a többi változótól. Ez a tény teszi lehetővé zárt renormalizációs egyenletek felírását a $P(h, \Omega)$ és $R(J, \Omega)$ eloszlásokra adott Ω energiaskálán. Megjegyezzük, hogy az egyenletek mind a fixpontban, mind a Griffiths fázisban analitikusan megoldhatóak. A [3]-ban kiválóan összefoglalt megoldás menetét és az eredményeket itt nem részletezzük, de az elérhető eredmények aszimptotikus egzaktságának tárgyalására röviden kitérünk.

Az energiaskálát $\Omega \rightarrow \Omega - d\Omega$ módon megváltoztatva az eltüntetett spinek hányadát nyilvánvalóan $d\Omega [P(\Omega, \Omega) + R(\Omega, \Omega)]$ adja meg. Így a csatolások eloszlásának megváltozását

a következő egyenlet írja le:

$$R(J, \Omega - d\Omega) = \left\{ R(J, \Omega) + d\Omega P(\Omega, \Omega) \int_0^\Omega dJ_{ij} \int_0^\Omega dJ_{jk} R(J_{ij}, \Omega) R(J_{jk}, \Omega) \right. \\ \left. \left[\delta \left(J - \frac{J_{ij}J_{jk}}{h_j} \right) - \delta(J - J_{ij}) - \delta(J - J_{jk}) \right] \right\} \{1 - d\Omega [P(\Omega, \Omega) + R(\Omega, \Omega)]\}^{-1}. \quad (121)$$

Az egyenlet jobboldalán a delta-függvények jelölik az egy lépés alatt begenerált új effektív csatolást, illetve a két régi decimált csatolást. A jobboldali utolsó faktor biztosítja a renormalizált eloszlásfüggvény normáltságát. A transzverzális terekre vonatkozó összefüggést a $J \leftrightarrow h$ és $R \leftrightarrow P$ cserével kaphatjuk meg. $R(J, \Omega - d\Omega)$ -t és $P(h, \Omega - d\Omega)$ -t sorbafejtve a következő integro-differenciál egyenletrendszerre jutunk:

$$\frac{dR}{d\Omega} = R(J, \Omega) [P(\Omega, \Omega) - R(\Omega, \Omega)] - P(\Omega, \Omega) \int_J^\Omega dJ' R(J', \Omega) R\left(\frac{J}{J'}, \Omega\right) \frac{\Omega}{J'}, \quad (122)$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = P(h, \Omega) [R(\Omega, \Omega) - P(\Omega, \Omega)] - R(\Omega, \Omega) \int_h^\Omega dh' P(h', \Omega) P\left(\frac{h}{h'}, \Omega\right) \frac{\Omega}{h'}, \quad (123)$$

amiket a kezdeti eloszlásfüggvények, mint kezdeti feltételek mellett kell megoldanunk.

Az egyenleteket elemezve kiderül, hogy mind a Griffiths fázisban, mind a kritikus pontban aszimptotikusan egzakttá válnak a fenti egyenletek és a belőlük kapható dinamika mennyiségek is. Ez annak köszönhető, hogy a renormalizációs fixponthoz közeledve annak a valószínűsége, hogy egy kidecimált külső tér $h_i = \Omega$ valamely J csatolása számottevő értékű, (azaz $\Omega > J > \alpha\Omega$, ahol $1 > \alpha > 0$) nullához tart. Azaz a perturbációs számítás során feltételezett helyzet, vagyis a decimált csatolással szomszédos egyéb csatolások elenyésző volta mindig teljesül, és a közelítésük egzakttá válik. A térbeli korrelációk vagy más sztatikus mennyiségek esetén azonban más a helyzet, az eredmények ezekre ugyanis csak a végtelen rendezetlenséggel jellemezhető fixpontban egzaktak. A fixpontbeli egzakt-ság a divergáló korrelációs hosszak és a végtelenül széles eloszlásoknak köszönhető. Ezzel szemben a Griffiths fázisban a korrelációs hossz véges és az eloszlásfüggvények szélessége is véges, így a statikus SDRG eredmények itt csupán közelítésnek tekinthetők.

C. Skálatörvények rendezetlen rendszerekben

A rendezetlen transzverzális terű Ising lánc esetén az SDRG renormalizációs lépéseket végrehajtva a rendszer az ún. végtelen rendezetlenségi fixpontba jut. Az ezáltal a fixpont által vezérelt viselkedést foglaljuk össze a C.1. fejezetben. A kritikus pont körül, a Griffiths fázisban a skálázásra a következők jellemzőek:

- a korrelációs hossz véges, miközben a relaxációs idő divergál;
- az L hosszúságskála és τ időskála közötti dinamikai skálázás anizotrop;
- nagy skálán tekintve a sűrűségek inhomogének;
- az átlagokat a ritka események dominálják.

A kritikus ponton kívüli szingularitások fizikai eredete a rendezetlen rendszerek esetében azon ritka régióknak köszönhető, ahol a lokális csatolások az erős fluktuációknak köszönhetően úgy alakulnak, hogy a termodinamikailag instabil fázist részesítik előnyben. Ahogy látni fogjuk, a skálázás a rendezett és rendezetlen Griffiths fázisban kissé eltérő, különösen egynél magasabb dimenziókban.

Mielőtt a skálaalakokra rátérnénk, röviden összefoglaljuk az alkalmazott jelöléseket. A rendezetlenséget leíró eloszlásfüggvény alakjára a továbbiakban feltesszük, hogy

$$P(\lambda) = D^{-1} \lambda^{-1+1/D} \quad (124)$$

alakú, ahol D a rendezetlenség erőssége. Az Ω energiaskála határozza meg a $\tau \sim \Omega^{-1}$ időskálát. A $\sigma_i(t)$ dinamikai változók függvényében az egyidejű korrelációs függvény $C(r) = \overline{\langle \sigma_i(0) \sigma_{i+r}(0) \rangle}$. Az átlagos (ξ_{av}), illetve a tipikus korrelációs hossz (ξ_{typ}) általában különböző lehet. Ezek definíciója a következő:

$$\xi_{\text{av}}^{-1} = \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{\ln C(r)}{r}, \quad \xi_{\text{typ}}^{-1} = \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{\overline{\ln \langle \sigma_i(0) \sigma_{i+r}(0) \rangle}}{r}. \quad (125)$$

Az autokorrelációs függvény szokásosan $G_i(t) = \overline{\langle \sigma_i(t) \sigma_i(0) \rangle}$. Skálatranszformációk alkalmazása esetén az átskálázást a $b > 1$ paraméterrel végezzük el, amivel az új távolságskála

$L' = L/b$ alakú lesz. Így például az egyidejű korrelációs függvény skálázása

$$C(r) = b^{-2x_m} C(r/b) \quad (126)$$

alakú.

C.1. Végtelen rendezetlenségi skálázás

A végtelen rendezetlenségi skálázás jellemzői a következők:

- aktivált skálázás;
- nagy skálán tekintve a sűrűségek inhomogének;
- az átlagokat a ritka események dominálják.

Az aktivált skálázás jelentése:

$$\ln \tau \sim \xi^\psi, \quad (127)$$

amiből:

$$|\ln \Omega| \sim L^\psi. \quad (128)$$

Így az energiaskála transzformálási szabálya

$$\ln \Omega' = b^{-\psi} \ln \Omega. \quad (129)$$

Mivel az alacsony energiájú gerjesztések eloszlása a $P(\ln \epsilon, L) = b^{-\psi} P(b^{-\psi} \ln \epsilon, L/b)$ transzformációnak tesz eleget, ahogyan a méret növekszik, a rendezetlenség erőssége is növekszik, így a fixpontban a rendezetlenség végtelenül erős lesz. A fizikai mennyiségek (pl. O) skálázását a ritka események dominálják, amikor a fizikai mennyiség értéke egységi nagyságrendű $\langle O \rangle = \mathcal{O}(1)$, miközben az értéke amúgy tipikusan exponenciálisan kicsi $\langle O \rangle_{\text{typ}} = \mathcal{O}(\exp(-aL^\omega))$, ahol $\omega = \mathcal{O}(1)$. A fizikai mennyiség átlagos értékének ($\overline{\langle O \rangle}$) a skálázása megegyezik a ritka események, illetve ritka régiók valószínűségének skálázásával. Ennek megfelelően az átlagos rendparaméter (m) skálázása megegyezik a lokálisan rendezett régiók sűrűségével (ρ_m): $\rho_m(\delta, L) = b^{-x_m} \rho_m(\delta b^{1/nu}, L/b)$. Hasonló az eredmény a térbeli korrelációs függvény esetében ($C(r)$) is. Ezekben az esetekben a megfelelő ritka esemény két független, egymástól r távolságra elhelyezkedő, lokálisan

rendezett régióból áll. A korrelációs függvény ritka régióinak a száma $\rho_C \sim \rho_m^2$.

Az erősen rendezetlen RG megközelítés alkalmazása során általában a globális rendparamétert, azaz a spinklaszter momentumát $\mu = mL^d$ vizsgáljuk. A klaszter fraktáldimenzióját d dimenzióban $d_f = d - x_m$ -mel jelölve a skálatörvény alakja: $\mu(\delta, |\ln \Omega|) = b^{d_f} \mu(\delta b^{1/\nu}, b^\psi |\ln \Omega|)$. A $b = |\ln \Omega|^{1/\psi}$ skálán tekintve a kritikus pontban

$$\mu(\delta = 0, |\ln \Omega|) = |\ln \Omega|^\phi, \quad (130)$$

ahol $\phi = (d - x_m)/\psi$. Megjegyezzük, hogy a tipikus korrelációs hossz lényegesen kisebb a valódi korrelációs hosszánál, hiszen $\xi_{\text{typ}} \sim \xi_{\text{av}}^{1-\psi}$. Időirányban a rendezetlenség teljesen korrelált, ezért ha egy ritka régióban lokális rendezettség található $t = 0$ -án, akkor az a későbbi időpontokban is mindig jelen lesz. Azaz $\rho_G \sim \rho_m$, amiből $G(\delta, \ln t) = b^{-x_m} G(\delta b^{1/\nu}, b^{-\psi} \ln t)$. Így $b = \ln t^{1/\psi}$ -t véve:

$$G(\delta, \ln t) = \ln t^{-x_m/\psi} \tilde{G}(\delta^{\nu\psi} \ln t). \quad (131)$$

Az autokorrelációk tehát ultralassan, az időben logaritmikusan csengenek le.

A kvantum kritikus pont körüli alacsony hőmérsékletű viselkedés $b = L_T \sim (\ln T)^{1/\psi}$ választással érhető el. A fajhő esetén a ritka régiók egymástól L_T távolságra elhelyezkedő alacsony energiájú gerjesztések, azaz $C_v(T) \sim L_T^{-d}$. Ezen ritka régiók egy Curie-jellegű járulékot adnak a szuszceptibilitáshoz, azaz $\chi(T) \sim L_T^{d-2x_m}/T$

$$\chi(T) \sim \frac{(\ln T)^{(d-2x_m)/\psi}}{T}, \quad C_v(T) \sim (\ln T)^{-d/\psi}. \quad (132)$$

Kis külső tér (H) esetén a termikus és mágneses energiaskálák összemérhetőek: $T \sim HmL_H^d \sim HL_H^{d-x_m}$, amiből $H \sim T(\ln T)^{d-x_m}$. Behelyettesítve a fentiekbe és $T = 0$ -n véve a szingularitások alakjára azt kapjuk, hogy kis külső tér esetén

$$\chi(H) \sim \frac{(\ln H)^{-x_m/\psi}}{H}, \quad C_v(H) \sim (\ln H)^{-d/\psi}. \quad (133)$$

C.2. Skálázás a rendezetlen Griffiths fázisban

A rendezetlen fázisban egy kis régió lokálisan rendezett, ha benne a csatolások erősebbek az átlagos rendezetlen külső térnél. Egy ilyen l_c méretű régió megtalálási valószínűsége exponenciálisan kicsi $p(l_c) \sim \exp(-\alpha l_c^d)$. Azonban ezek a régiók nagyon stabilak a fluktuációkkal szemben és a relaxációs idejük

$$t_r \sim \exp(\sigma l_c^d). \quad (134)$$

Valóban, a legalacsonyabb gerjesztési energia egy véges méretű, rendezett rendszerben $\epsilon \sim \exp(-\sigma l_c^d)$ és $t_r \sim \epsilon^{-1}$. A nagy relaxációs idők eloszlásfüggvénye így hatványfüggvény alakú

$$p(t_r) \sim t_r^{-d/z-1} \quad (135)$$

ahol $d/z = \alpha/\sigma$. Az átlagos autokorrelációs függvény vezető rendben szintén hatványfüggvény alakú:

$$G(t) \sim \int dt_r p(t_r) \exp(-t/t_r) \sim t^{-d/z}, \quad (136)$$

ahol a kitevő δ függő. A kritikus esetben az autokorrelációs függvényre megismert 131 egyenletbeli $\tilde{G}(y)$ függvény rendezetlen esetben várhatóan $\tilde{G}(y) \sim -y$ alakú, amivel az autokorrelációs függvény vezető rendben hatványfüggvény alakú:

$$G(\delta, \ln t) = \ln t^{-x_m/\psi} t^{-\eta(\delta)}, \quad (137)$$

logaritmikus korrekcióval. Ahogy a Griffiths fázisban általában is, az exponens η a kontrollparaméter (δ) függvénye, ami a szokásos választás esetén pozitív a rendezetlen Griffiths fázisban. $\delta \rightarrow 0$ esetén $\eta(\delta)$ alakja $\eta(\delta) \sim \delta^{\nu\psi}$. Ezt összevetve a (136) alakkal $\frac{d}{z} \sim \delta^{\nu\psi}$. A nagy relaxációs időkre vonatkozó (135) egyenletből az alacsony gerjesztési energiák eloszlására a következő adódik: $P(\epsilon) \sim \epsilon^{-1+d/z}$. Összevetve ezt az alakot a rendezetlenség erősségét, D -t bevezető (124) egyenlettel arra jutunk, hogy a (rendezetlen) Griffiths fázisban a rendezetlenség mértéke (D) véges $D = z/d$. Mivel a gerjesztések lokalizáltak, $P(\epsilon) = b^{-d}P(\epsilon') d\epsilon' = b^{-d+z/D}P(\epsilon) d\epsilon$, amiből:

$$\Omega \sim L^{-z}. \quad (138)$$

Az autokorrelációs függvény skálázása abból a tényből származik, hogy a ritka régiók sűrűsége a Griffiths fázisban nem más mint a rendszer részecskesűrűsége: $G(t) = b^{-d}G(t/b^z)$. Itt $b = t^{1/z}$ választással a (136) egyenletbeli összefüggést láthatjuk. Az alacsony hőmérsékletű viselkedést $b = L_T \sim T^{-1/z}$ választással számíthatjuk ki, ismét felhasználva, hogy a ritka régiók sűrűsége a rendszer részecskesűrűséggel egyezik meg a fajhő $c_\nu(T) \sim L_T^{-d}$ és a szuszceptibilitás esetében is $\chi(T) \sim L_T^{-d}/T$. A szuszceptibilitásnál az egyes járulékok Curie-alakúak, amivel a szingularitások alakjára:

$$\chi(T) \sim T^{-1+d/z} , \quad c_\nu(T) \sim T^{d/z} \quad (139)$$

adódik. A kis külső tér (H) melletti szingularitásoknál figyelembe véve, hogy a rendezetlen fázisban $H \sim T$ esetén $L_H \sim L_T$, $T = 0$ mellet azt kapjuk, a $b = L_H \sim H^{-1/z}$ választással, hogy

$$\chi(H) \sim H^{-1+d/z} , \quad c_\nu(H) \sim H^{d/z} . \quad (140)$$

C.3. Skálázás a rendezett Griffiths fázisban

A rendezett Griffiths fázisban az érdekes gerjesztések azokhoz a nagy, rendezett régiókhöz kötődnek, amik nem kapcsolódnak a makroszkopikus méretű rendezett régióhoz. Egy ilyen, a makroszkopikus rendezett doméntól elegendően elhatárolt rendezett régió előfordulási valószínűsége kisebb, mint a rendezetlen fázisban, ugyanis egy l_c méretű ilyen domén kialakításához egydimenzióban egymás után nagyságrendileg l_c gyenge és l_c erős csatolás szükséges, azaz $p_0(l_c) \sim \exp(-\alpha 2l_c)$. Mivel a relaxációs idő ugyanaz, mint a rendezetlen esetben (134), az autokorrelációs függvény lecsengését megadó exponens a duplájára nő, az értéke $2/z$. $d > 1$ esetén minden irányból elegendően el kell határolni a rendezett domént, azaz $l_0 \sim l_c^d$ elhatárolásra van szükség, ami alapján egy ilyen izolált klaszter valószínűsége $p(l_c) \sim \exp(-\alpha' l_c^d) \sim \exp(-\alpha l_c^{d^2})$. Mivel a relaxációs idő $\tau \sim \exp(\alpha l_c^d)$ alakú, a (136) egyenletből az autokorrelációs függvény alakja: $G(t) \sim \exp(-A|\ln t|^d)$. Az L távolságskála és az Ω energiaskála között összefüggést teremthetünk a következő módon. Az L méretű rendszerbeli legnagyobb elszigetelt rendezett klaszter méretét megkaphatjuk az extrém érték statisztikából: $l_c^{d^2} \sim \ln L$. Az ennek megfelelő gerjesztési energiára viszont az eddigiek alapján felírhatjuk, hogy $\Omega \sim 1/\tau \sim \exp(-\alpha l_c^d)$, amiből:

$$|\ln \Omega| \sim (\ln L)^{1/d} . \quad (141)$$

Az alacsony hőmérsékleti szingularitások a rendezetlen fázishoz hasonlóan kaphatóak meg, azonban most $L_T \sim \exp[-A|\ln T|^d]$. Így tehát:

$$\chi(T) \sim \frac{1}{T} \exp[-C|\ln T|^d], \quad c_\nu(T) \sim \exp[-C'|\ln T|^d]. \quad (142)$$

Hasonlóan megkaphatóak a kis külső térre vonatkozó összefüggések is a $H \sim T$ helyettesítéssel.

Irodalomjegyzék

- [1] H. Rieger és A. P. Young, *Complex Behavior of Glassy Systems*, (szerk.) M. Rubi és C. Perez-Vicente, Lecture Notes in Physics **492**, p. 256, Springer-Verlag, Heidelberg, (1997)
- [2] R. N. Bhatt, *Spin glasses and random fields* A. P. Young Ed., World Scientific (Singapore, 1998).
- [3] F. Iglói és C. Monthus, *Physics Reports* **412**, 277 (2005)
- [4] Th. Vojta, *J. Phys. A* **39**, R143 (2006)
- [5] R. B. Griffiths, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 17 (1969)
- [6] B. Kramer és A. MacKinnon, *Rep. Prog. Phys.* **56**, 1469 (1993)
- [7] Y. Liu, K. A. McGreer, B. Nease, D. B. Haviland, G. Martinez, J. W. Halley és A. M. Goldman, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2068 (1991)
- [8] W. Wu, D. Bitko, T. F. Rosenbaum és G. Aeppli, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1919 (1993)
- [9] F. Iglói és I. A. Kovacs *Phys. Rev. B* **77** 144203 (2008)
- [10] M. Karsai, I. A. Kovács, J-Ch. Anglès d'Auriac, F. Iglói (publikálás alatt)
arXiv:0805.2006v1, http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0805/0805.2006v1.pdf
- [11] P. C. Hohenberg és B. I. Halperin, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 435 (1977)
- [12] S. Chakravarty, B. I. Halperin és D. R. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1057 (1988)
Phys. Rev. B **39**, 2344 (1989)
- [13] S. Sachdev és J. Ye, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2411 (1992)
- [14] R. P. Feynman, *Statistical Mechanics*, (Addison-Wesley, 1972)
- [15] V. Privman, *Finite Size Scaling és Numerical Simulation of Statistical Systems* (szerk.) V. Privman (World Scientific, 1990), p. 1
- [16] P. Pfeuty, *Ann. Phys. (NY)* **27** (1970)
- [17] M. Wallin, E. S. , S. M. Girvin és A. P. Young, *Phys. Rev. B* , **49**, 12115 (1994)
- [18] H. Rieger és A. P. Young, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 4141 (1994)
- [19] M. J. Thill és D. A. Huse, *Physica (Amsterdam)* **15A**, 321 (1995)
- [20] H. Rieger és A. P. Young, *Phys. Rev. B* **54**, 3328 (1996)
- [21] F. Iglói, R. Juhász and H. Rieger, *Phys. Rev. B* **59**, 11308 (1999)
- [22] B. McCoy, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 383 (1969)
- [23] A. P. Young és H. Rieger, *Phys. Rev. B* **53**, 8486 (1996)
- [24] P. Henelius és S. M. Girvin, *Phys. Rev. B* **57**, 11457 (1998)

- [25] F. Iglói, R. Juhász és H. Rieger, *Phys. Rev. B* **61**, 11552 (2000)
- [26] F. Iglói és H. Rieger, *Phys. Rev. B* **57**, 11404 (1998)
- [27] K. Hida, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3297 (1999)
- [28] K. Yang és R. A. Hyman, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2044 (2000)
- [29] K. Hida, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2045 (2000)
- [30] E. Carlon, P. Lajkó és F. Iglói, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 277201 (2001)
- [31] F. Iglói, R. Juhász, és P. Lajkó, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1343 (2001)
- [32] S. Todo, K. Kato, és H. Takayama, *J. Phys. Soc. Jpn.* **69**, 355 (2000)
- [33] S. Bergkvist, P. Henelius, és A. Rosengren, *Phys. Rev. B* **66**, 134407 (2002)
- [34] D.S. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 534 (1992)
- [35] D.S. Fisher, *Phys. Rev. B* **51**, 6411 (1995)
- [36] R. A. Hyman és Kun Yang, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1783 (1997)
- [37] C. Monthus, O. Golinelli, és Th. Jolicoeur, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3254 (1997)
- [38] F. Iglói, *Phys. Rev. B* **65**, 064416 (2002)
- [39] A. W. Sandvik, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3209 (2001)
- [40] N. Laflorencie, S. Wessel, A. Läuchli, és H. Rieger, *Phys. Rev. B* **73**, 060403(R) (2006)
- [41] F. Iglói és H. Rieger, *Phys. Rev. E* **58**, 4238 (1998)
- [42] G. Theodorou és M. H. Cohen, *Phys. Rev. B* **13**, 4597 (1976)
- [43] E. Lieb, T. Schultz és D. Mattis, *Annals of Phys.* **16**, 407 (1961)
- [44] R. A. Hyman, K. Yang, R. N. Bhatt, és S. M. Girvin, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 839 (1996)
- [45] D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **50**, 3799 (1994)
- [46] P. Pfeuty, *Phys. Lett.* **72A**, 245 (1979)
- [47] F. Iglói és L. Turban, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1206 (1996)
- [48] T. P. Eggarter és R. Riedinger, *Phys. Rev. B* **18**, 569 (1978)
- [49] C. A. Lamas, D. C. Cabra, M. D. Grynberg és G. L. Rossini, *Phys. Rev. B* **74**, 224435 (2006)
- [50] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **92**, 1331 (1953)
- [51] H. Schmidt, *Phys. Rev.* **105**, 425 (1957)
- [52] J. Galambos, *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics* (John Wiley and Sons, New York, 1978).

- [53] H. Kesten, *Acta Math.* **131**, 207 (1973)
- [54] B. Derrida és H. Hilhorst, *J. Phys. A* **16**, 2641 (1983)
- [55] C. de Calan, J. M. Luck, T. M. Nieuwenhuizen és D. Petritis, *J. Phys. A* **18**, 501 (1985)
- [56] J. P. Bouchaud, A. Gorges, *Phys. Rep.* **195**, 127 (1990)
- [57] J. W. Haus, K. W. Kehr, *Phys. Rep.* **150**, 263 (1987)
- [58] D. R. Nelson, cond-mat/0309559
- [59] J. P. Bouchaud, A. Comtet, A. Gorges és P. Le Doussal, *Annals of Physics* **201**, 285-341 (1990)
- [60] F. Iglói és H. Rieger, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2473 (1997)
- [61] J. J. H. Simmons, P. Kleban, K. Dahlberg, R. M. Ziff, *J. Stat. Mech.* P06012 (2007)
- [62] <http://people.bolyai.elte.hu/~steve3281/SDRG>
- [63] B. M. McCoy és T. T. Wu, *Phys. Rev.* **176**, 631 (1968)
- [64] B. M. McCoy és T.T. Wu, *Phys. Rev.* **188**, 982(1969)
- [65] B. M. McCoy, *Phys. Rev.* **188**, 1014 (1969)
- [66] D. Stauffer és A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory*, (Taylor és Francis, London) (1992)
- [67] T. W. Burkhardt és E. Eisenriegler, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, L83 (1985)
- [68] S. K. Ma, C. Dasgupta és C.-K. Hu, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1434 (1979)
- [69] C. Dasgupta és S. K. Ma, *Phys. Rev. B* **22**, 1305 (1980)
- [70] H. Kesten, M. Koslov, F. Spitzer, *Compositio Math.* **30**, 145 (1975)
- [71] A. Dhar, A. P. Young, *Phys. Rev. B* **68**, 13441 (2003)
- [72] C. Calan, J. M. Luck, T. Nieuwenhuizen, D. Petritis, *J. Phys. A* **18**, 501 (1985)
- [73] B. Derrida, Y. Pomeau, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 627 (1982)
- [74] C. Monthus, *J. Phys. A* **36**, 11605 (2003)