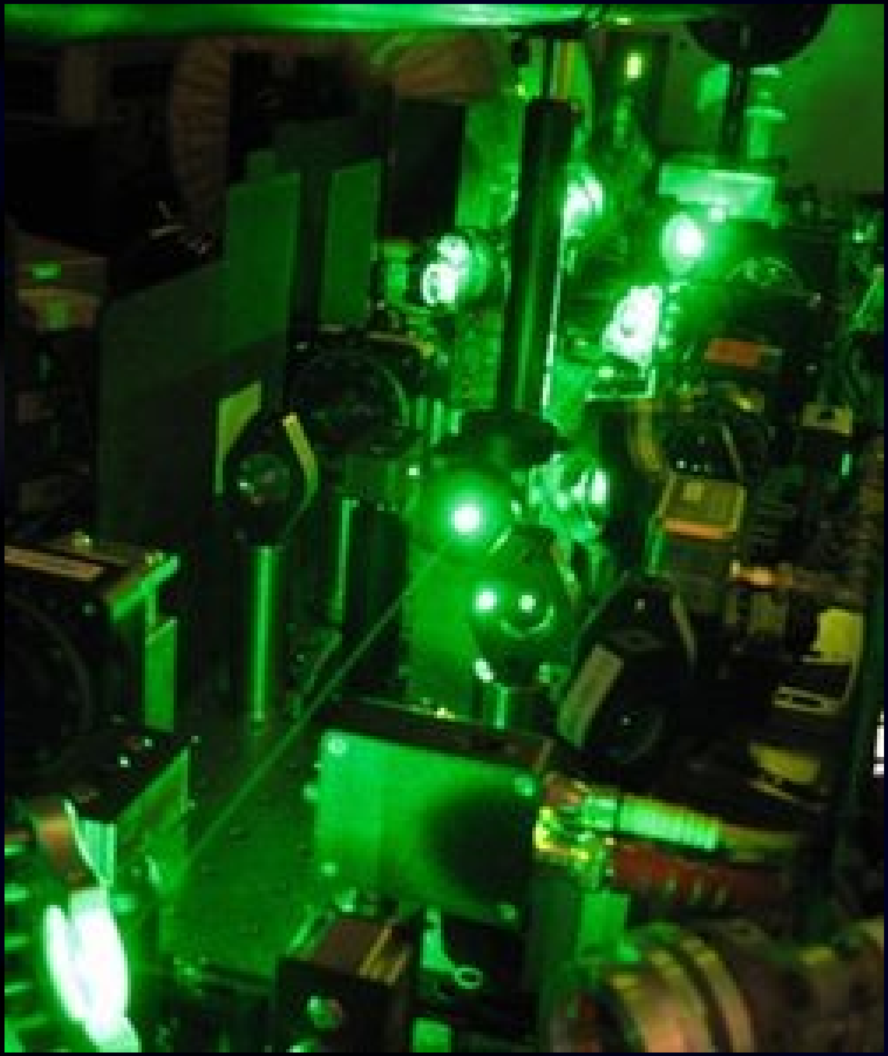
Gravitációs hullámok előadás

Coherent WaveBurst
Bevezető áttekintés

Handbauer Péter,
loserock@elte.hu

Előzetes tudnivalók

- K db különböző detektor
- CÉL: Burst jelek...
  - azonosítása
  - lokalizációja
  - elemzése
- Újdonságok koincidencián alapuló módszerekhez képest?



Likelihood módszerek 1.

Fogalmak, jelölések:

- Wavelet (t,f): $w_k[i,j]$
- Antenna patterns: $F_{+k}(\theta,\varphi), F_{\times k}(\theta,\varphi)$
- Detektor válasz: $\xi_k[i,j]=F_{+k}h_+[i,j]+F_{\times k}h_\times[i,j]$
- Normál eloszlású zaj: $\sigma_k[i,j]$
- **Valószínűség (likelihood)**:

$$\mathcal{L}=\sum_{k=1}^{K}\sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{w_k^2[i,j]}{\sigma_k^2[i,j]}-\frac{(w_k[i,j]-\xi_k[i,j])^2}{\sigma_k^2[i,j]}\right)$$

Likelihood módszerek 2.

- Újdonság: együtt dolgozzuk fel a K detektor K*N adatát (nem pedig külön-külön)! Adatvektorok:

$$\mathbf{w}[i,j] = \left(\frac{w_1[i,j]}{\sigma_1[i,j]}, .., \frac{w_K[i,j]}{\sigma_K[i,j]}\right)$$

$$\mathbf{f}_{+(\times)}[i,j] = \left(\frac{F_{1+(\times)}}{\sigma_1[i,j]}, .., \frac{F_{K+(\times)}}{\sigma_K[i,j]}\right)$$

- Felbontható $L=L_+ + L_\times$ alakban, h_+ és $h_\times$ kifejezhető innen:

$$(\mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_+) = |\mathbf{f}_+|^2\, h_+$$

- A detektor hálózat érzékenységét jellemzik: $|\mathbf{f}_+|^2$, $|\mathbf{f}_\times|^2$ normák

Likelihood módszerek 3.

- Szabályozók:
  - $|\mathbf{f}'_\times|^2 = |\mathbf{f}_\times|^2 + \delta$, ahol δ választható paraméter
  - δ egy „új detektor”: $f_{+,K+1}=0$, $f_{\times,K+1}=\mathrm{SQRT}(\delta)$, 0 kimenet
  - Megőrzi $\mathbf{f}_\times$ és $\mathbf{f}'_\times$ ortogonalitását
  - δ=0: standard likelihood, δ=∞: erős kényszerű lh.
- δ függő maximum likelihood ($\mathbf{e}_+$ és $\mathbf{e}'_\times$ egységvektorok):

$$L_{\max} = \sum_{\Omega_{TF}} \left[\frac{(\mathbf{w}\cdot\mathbf{f}_+)^2}{|\mathbf{f}_+|^2} + \frac{(\mathbf{w}\cdot\mathbf{f}'_\times)^2}{|\mathbf{f}'_\times|^2} \right] = \sum_{\Omega_{TF}} \left[(\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_+)^2 + (\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}'_\times)^2 \right]$$

Az adatanalízis főbb lépései

- Wavelet-transzformáció (idő–frekvencia-szerű tér)
  - Discrete wavelet transformation (DWT), többféle skálázással
- „Előrejelzéses” lineáris hibaszűrés
  - Linear prediction error (LPE), pl. hiba csúcsok kiszűrése
- Késleltető wavelet szűrők gyártása
  - Detektorok közti időeltolás kiküszöbölésére
- Koherens burst triggerek definiálása

Wavelet-transzformáció

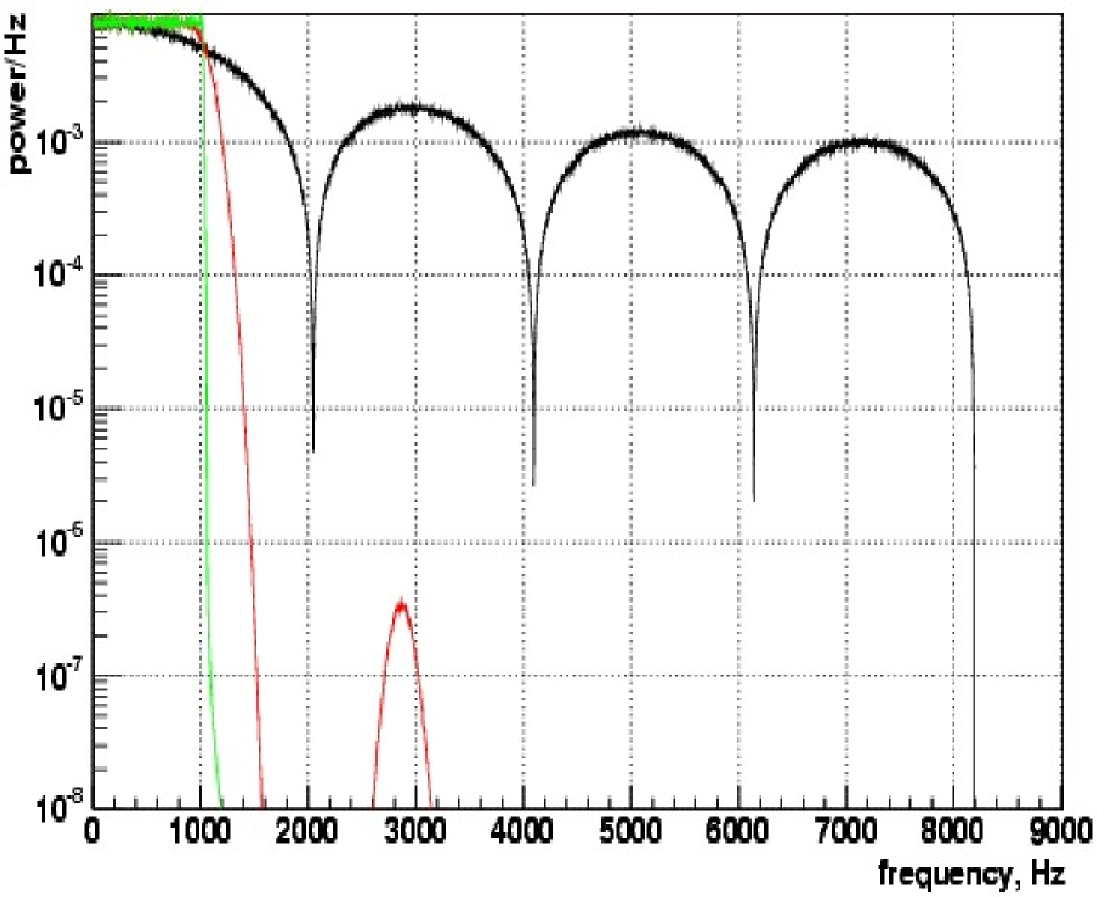


Figure 1. Comparison of spectral leakage from the first (low) frequency band 0−1024Hz to the high frequency bands for Haar (black), Symlet60 (red) and Meyer1024 (green) wavelets after three wavelet decomposition steps.

- Cél: $x(t) \rightarrow w[i,j] \rightarrow w(f,t)$
- Idő/frekvencia felbontás:
  - Δt_j (R), R: felbontási ráta
  - $\Delta f_j = 1/(2\Delta t_j)$
- Több t-f felbontás kell!
- Spektrális szivárgás ellen: Meyer1024 filter (ld. ábra)

Linear prediction error filter

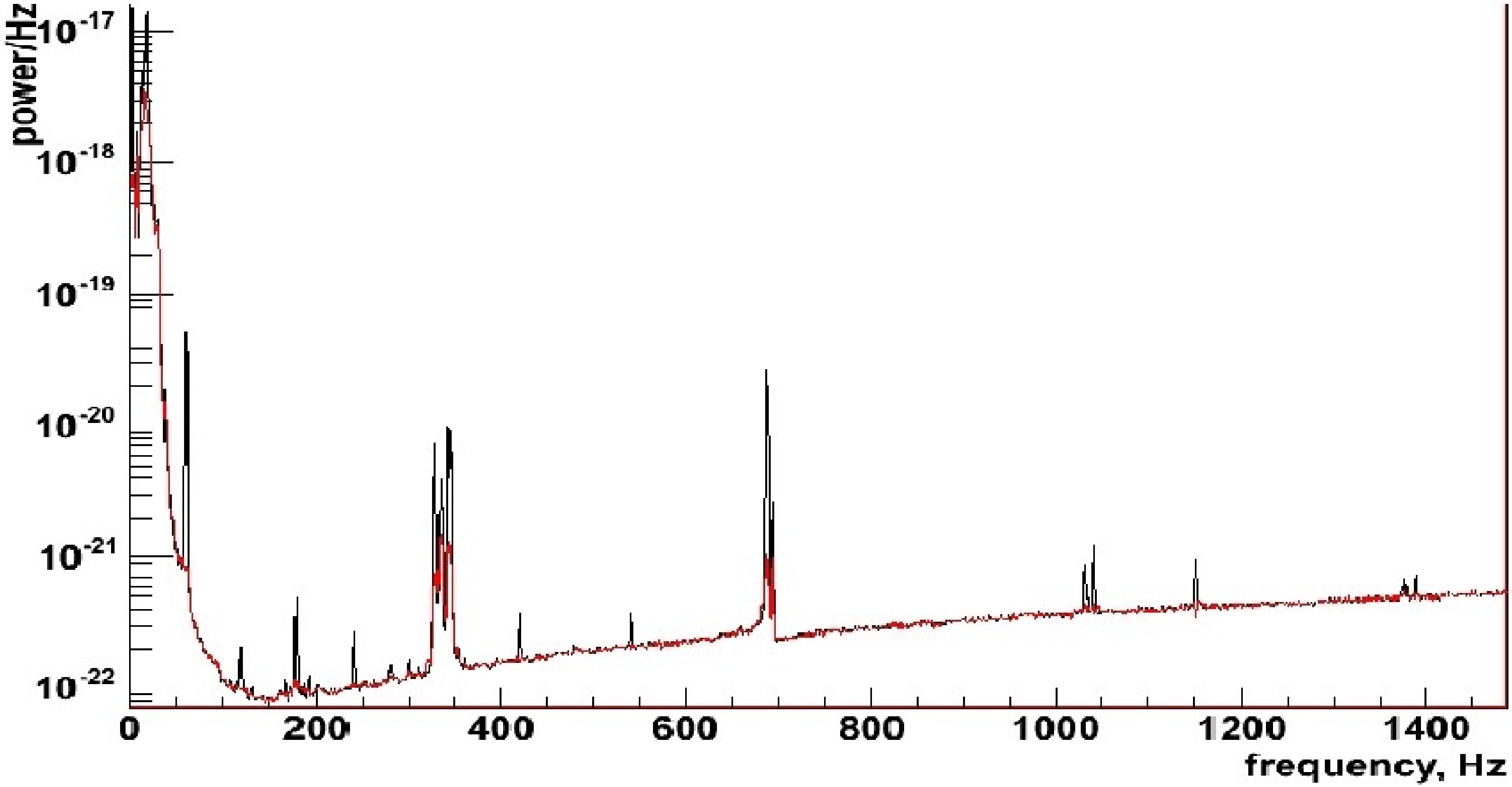


Figure 2. Power spectra of original (black) and LPE filtered (red) noise of the Hanford 4k detector.

Time delay filters

- $(\tau_n - \tau_m)(\theta,\varphi)$: időkülönbség m és n detektor között
- $D_{kl}(\tau,j)$ filter:

$$w_{n,m}(i,j,\tau) = \sum_{kl} D_{kl}(\tau,j) w_{n,m}(i+k,j+l)$$

- Legyártás:
  - Wavelet készítés egyetlen TF együtthatóval → inverz wavelet-transzformáció → $\Psi_j(t)$ idő domén → $\Psi_j(t+\tau)$ → wavelet-transzformáció → $D_{kl}(\tau,j)$ együttható a j réteghez „elmozdulás” szerint
- K>20 esetén <1% részleges energia veszteség:

$$\epsilon_K = 1 - \sum_K D_{kl}^2$$

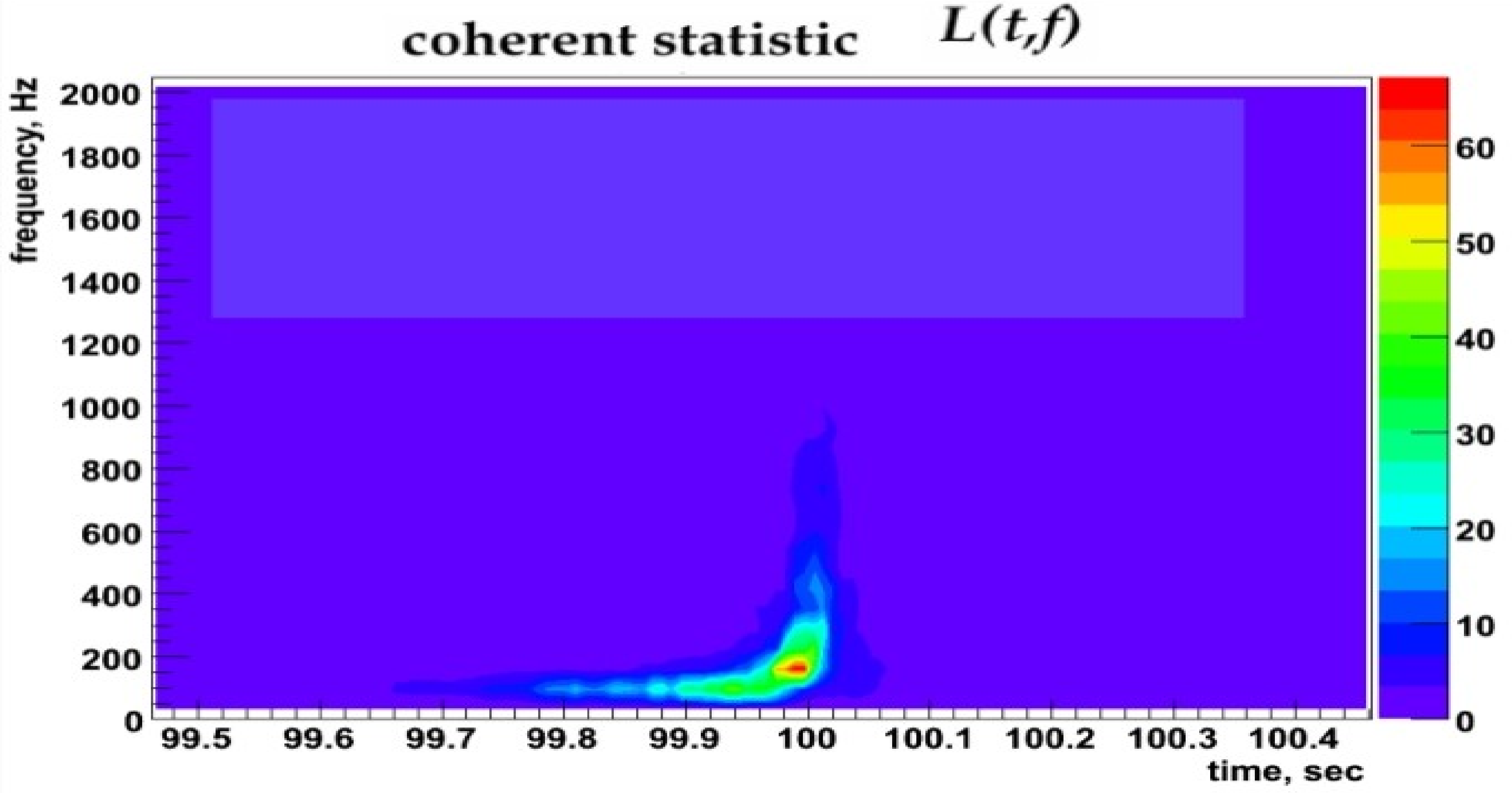
Likelihood idő–frekvencia-térkép

- Likelihood az ég egy pontjára:
  $L_p\ (i,j,\theta,\varphi) = |\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{w} - \mathbf{f}_+ h_+ - \mathbf{f}_\times h_\times|^2$
- (θ,φ) szerint maximalizálható L_p! $\rightarrow L_m(i,j)$
  - Ha volt észlelés, így lehet lokalizálni a helyét!
  - L_m értéket összevethetjük egy küszöbértékkel!
- A koherens trigger likelihood:

$$\mathcal{L}_c(\theta,\phi) = \sum_{ij} \mathcal{L}_p(i,j,\theta,\phi)$$

- L_{max} az L_c θ és φ feletti variációjából is előáll

Likelihood idő–frekvencia-térkép:



time-frequency map of 18 Ms binary at 2 Mpc using un-modeled search in the LIGO network

Koherens triggerek

- Elég lehet L_{max} -ra limitet választani. A finomabb módszer a következő:
- n,m detektorra: $$L_{\max} = \sum_{nm} L_{nm} = \sum_{nm} \left[\langle w_n w_m e_{+n} e_{+m}\rangle + \langle w_n w_m e'_{\times n} e'_{\times m}\rangle\right]$$
- L_{nm} nem diagonális összege a hálózat E_{coh} energiája!
- r_{nm}: csökkentett koh. energia: null-mátrix:

$$r_{nm} = \frac{L_{nm}}{\sqrt{L_{nn} L_{mm}}}. \qquad e_{\mathrm{coh}} = \sum_{nm} L_{nm} |r_{nm}|, \quad n \neq m.$$

$$N_{nm} = E_{nm} - L_{nm}$$

(← ez a zaj normalizált energiája) E_{nn}=<$x^2{}_n$>, normalizált energia a detektorokban

- **<u>A hálózat korrelációs együtthatói:</u>**

$$\boxed{C_{\mathrm{net}} = \frac{E_{\mathrm{coh}}}{N_{\mathrm{ull}} + |E_{\mathrm{coh}}|}, \quad c_{\mathrm{net}} = \frac{e_{\mathrm{coh}}}{N_{\mathrm{ull}} + |e_{\mathrm{coh}}|}}$$

← N_{null}=SUM(N_{nm}), a null stream teljes energiája