Gravitációshullám kontra időben változó newtoni gravitációs tér

Kiss Gellért Zsolt[1, a]

[1] *Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest*

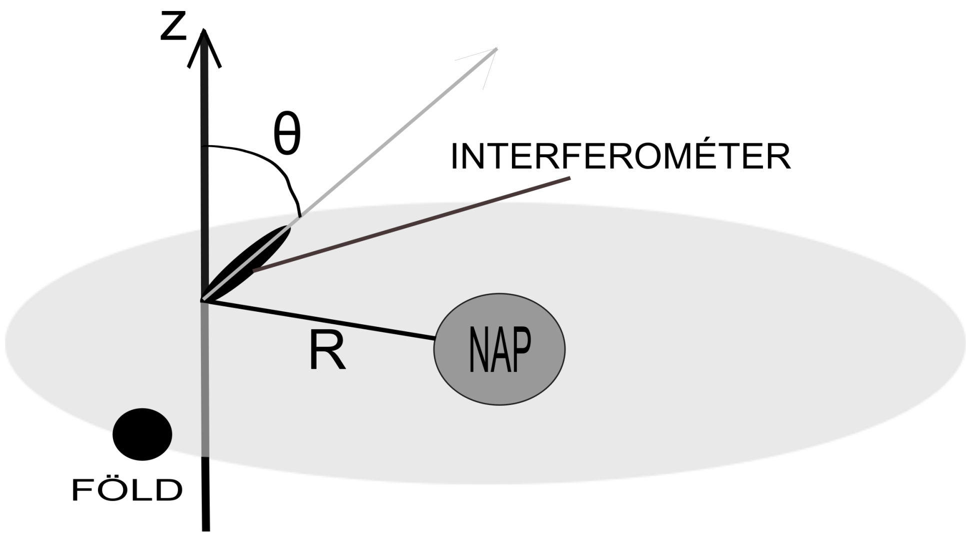
PACS numbers:

I. BEVEZETÉS: FÖLD - NAP RENDSZER ÁLTAL KELTETT GRAVITÁCIÓS HULLÁMOK KIMUTATÁSA (?) [1]

A forgó kettős tömegű rendszerek gravitációshullámok forrásait képezik. Az Einstein relativitáselméletének értelmében, két masszív objektum a tömegközéppontjuk körül keringve gravitációs hullámokat hoz létre.

Ilyen kettős rendszer például a Föld-Nap rendszere is. Igaz azonban, hogy a hullámforrás szempontjából sokkal kevésbé jelentős mértékben, ha figyelembe vesszük, hogy a Föld sokkal kisebb tömegű mint a Nap és a keringési frekvenciája a tömegközéppont körül (mely pont a Nap belsejében található) is több nagyságrenddel kisebb, mint például két azonos tömegű neutron csillag keringési frekvenciája. Feltevődik a kérdés, hogy lehetséges lenne-e detektálni a csillagunk és a bolygónk rendszere által keltett hullámokat, és ha igen, akkor milyen módon.

Legyen θ a keringési síkra merőleges egyenes és a megfigyelési irány közötti szög. Tegyük fel, hogy a megfigyelő a kettős rendszeren kívül tartózkodik, R távolságra a rendszer tömegközéppontjától. Amennyiben az R sokkal nagyobb, mint a keltett gravitációshullám hullámhossza, a hullám két polarizációjára a következő értékeket kapjuk:



1. ábra. A Nap-Föld kettős rendszer által indukált gravitációshullám detektálása.

$$h_+ = -\frac{1}{R}\,\frac{G^2}{c^4}\,\frac{2m_1m_2}{r}(1+\cos^2\theta)\cos\left[2\omega(t-R)\right], \tag{1.1}$$

$$h_\times = -\frac{1}{R}\,\frac{G^2}{c^4}\,\frac{4m_1m_2}{r}\,(\cos\theta)\sin\left[2\omega(t-R)\right]. \tag{1.2}$$

[a] Electronic address: zsolti.g.kiss@gmail.com

Az m_1 illetve m_2 a két objektum tömege, r a köztük lévő távolság, c a fény sebessége, G a gravitációs állandó. Itt felhasználtuk még a newtoni fizika szerint számolt konstans szögsebesség képletét:

$$\omega = \sqrt{G(m_1 + m_2)/r^3}. \tag{1.3}$$

Amennyiben a megfigyelő az $x - y$ síkban található, akkor a $\theta = \pi/2$ és a $\cos\theta = 0$. Ezért a $h_\times$ polarizáció értéke mindig nulla. Ugyanakkor az is belátható, hogy a keltett hullám frekvenciájának értéke kétszerese a keringési frekvencia értékének (ω). Behelyettesítve a h_+ kifejezésébe a Föld-Nap rendszerre a jellemző fizikai mennyiségek értékekeit kapjuk, hogy:

$$h_+ = -\frac{1}{R}\frac{G^2}{c^4}\frac{4m_1m_2}{r} = -\frac{1}{R}1.7 \times 10^{-10}\,\text{méter}. \tag{1.4}$$

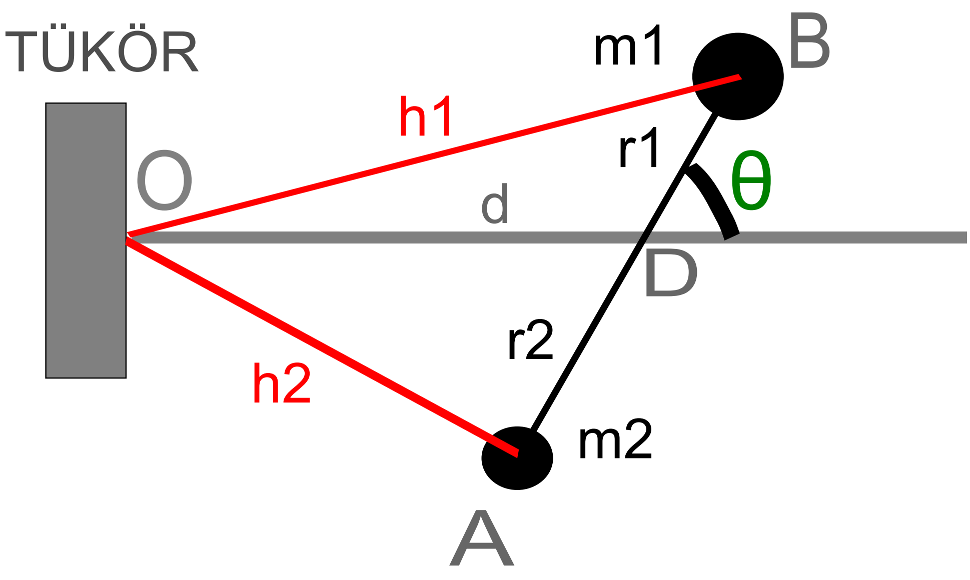
Azon esetben, ha a megfigyelőnek a tömegközépponttól számított távolsága $R \approx 1$ fényév lenne, a megfigyelt gravitációshullám amplitudója $h \approx 10^{-26}$ nagyságrendű volna. Ez egy jelentősen kicsi érték, **ekkora relatív elmozdulást** egyelőre **lehetetlen volna kimérni**, azaz ez az érték jóval a **jelenlegi detektorok érzékenységi határai alatt helyezkedik el**.

II. GRAVITÁCIÓSHULLÁM KONTRA IDŐBEN VÁLTOZÓ NEWTONI GRAVITÁCIÓS TÉR TÁRGYALÁSA

Felmerül a kérdés, hogy a kettős tömegrendszerek által keltett gravitációshullámok detektálását, milyen mértékben befolyásolja a Newton elméletéből származó klasszikus erőtér változása. Tudni szeretnénk, hogy a newtoni gravitációs tér változása, milyen viszonyban van magával az Einstein-egyenletekből kiszámolt hullámok frekvenciájával, valamint fontos lenne megállapítani, hogy amennyiben viszony van a két frekvencia között, akkor a forrástól mért milyen távolságokban jelentős a newtoni hatás.

Hasonlóan az **általános relativitáselméleten** alapuló tárgyalásmódhoz vegyük azt a példát, mikor két m_1 illetve m_2 tömegű objektum kering állandó távolságra közös tömegközéppontjuk körül (r_1, r_2). Úgy mint az általános relativitáselméletből kiszámolt téridő görbültségének változás, a newtoni elméletben is, ha pörgetünk egy kettős rendszert változik a lokális gravitációs tér értéke.

A következőkben ezen változás értékét tárgyaljuk, valamint megvizsgáljuk, hogy mekkora erő fejtődik ki a tükörre, és ez mekkora relatív megnyúlást (straint) indukál. A kísérletet az alábbi Fig. 2 ábra szemlélteti.



2. ábra. Két tömegpont rendszer forgása a D tömegközéppont körül és a newtoni változó gravitációs tér által létrejövő változás detektálása interferométer segítségével.

A Fig. 2 ábrán a két test tömegközéppontja d távolságra található a tükörtől, amelyet esetünkben tömegpontnak tekintünk, figyelembe véve, hogy ez a távolság, jóval nagyobb, mint maga az r_1 és r_2 kar távolságok. Az m_1 és az m_2

tömegű objektumok, illetve az ezeket összekötő $r_1 + r_2$ nagyságú AB szakasz együtt forog az interferométer tengelyén található D-vel jelzett tömegközéppont körül állandó f frekvenciával. A h_1 illetve h_2 értékek az objektumoknak a tükörtől, mint tömegponttól mért távolságuk.

Az AB szakasz és az interferométer tengelye közötti szög θ az idő függvényében változik:

$$\theta(t) = 2\pi f \cdot t. \tag{2.1}$$

A Fig. 2 ábrán az OAD és OBD háromszögekben felírjuk az általános Pitagorasz-tételét a h_1 és h_2 szakaszokra:

$$h_1^2 = d^2 + r_1^2 - 2dr_1 \cos\theta$$

$$h_2^2 = d^2 + r_2^2 + 2dr_1 \cos\theta. \tag{2.2}$$

Élhetünk egy egyszerűsítéssel:

$$h_i = \sqrt{1 + R_i^2 - 2R_i \cdot \cos\theta}, \tag{2.3}$$

ahol

$$\begin{array}{ll} R_i = \frac{r1}{d}, & \text{ha} \quad i = 1 \\ R_i = -\frac{r2}{d}, & \text{ha} \quad i = 2. \end{array} \tag{2.4}$$

A M tömegű tükör tömegpontjában felírva a potenciált, kapjuk hogy:

$$V^{\mathrm{N}} = \sum_{i=1}^{2} V_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}} = -GM \sum_{i=1}^{2} \frac{m_{\mathrm{i}}}{h_{\mathrm{i}}}. \tag{2.5}$$

A potenciál gradienséből származtatható a tengely irányában ható erő (F), melyből majd a tükör indukált kitérésének gyorsulása (a):

$$F = -\frac{\partial V}{\partial d}, \tag{2.6}$$

$$a(t) = \frac{F}{M} = \frac{G}{d^2} \sum_{i=1}^{2} m_i B_i(R_i, \theta). \tag{2.7}$$

B_i egy θ függő mennyiség, vagyis időfüggő:

$$B_i(R_i, \theta) = \frac{1 - R_i \cos\theta}{(1 + R_i^2 - 2R_i \cos\theta)^{3/2}}. \tag{2.8}$$

Az 2.7, illetve 2.8 egyenletek még egzakt kifejezések megadják, hogy mekkora gyorsulást fog 'szenvedni' a tükör. A tükör kimozdulását, 'rángatózását' elképzelhetjük úgy, mint egy oszcillátorét, melynek gyorsulása időtérben:

$$a = \ddot{x} = \frac{F(t)}{m}. \tag{2.9}$$

Áttérhetünk frekvencia-térbe a Fourier-transzformált segítségével:

$$\omega^2 \ddot{x}(\omega) = \frac{F(\omega)}{m}, \tag{2.10}$$

ahonnan

$$x(\omega) = \frac{F(\omega)}{m\omega^2} = \frac{a(\omega)}{\omega^2}. \tag{2.11}$$

Az $x(\omega)$ az indukált kitérés a külső erő következtében frekvencia függvényében ($\omega = 2\pi f$). Az $x(\omega)$-ra kapjuk az egzakt képletet:

$$x(\omega) = \frac{G}{(2\pi f)^2 d^2} \sum_{i=1}^{2} m_i B_i, \tag{2.12}$$

melyben az időfüggést a B_i tag hordozza.

Továbbiakban figyelembe vesszük, hogy $r_i \ll d$, ezért **sorbafejthetünk** R_i **szerint**:

$$x = \frac{G}{(2\pi f d)^2} \cdot \left[\frac{2M_1}{d} \cos(2\pi f t) + \frac{9M_2}{4d^2} \cos(2\pi \cdot 2ft) + ... \right]. \tag{2.13}$$

Az előbbi 2.13 sorfejtés során elhagytuk a nulladrendű, időfüggetlen tagot.

Az $M_1 = m_1 r_1 - m_2 r_2$ a dipól momentum, az $M_2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$ a kvadrupól momentum, $M_3 = m_1 r_1^3 - m_2 r_2^3$ az oktupól momentum, és így tovább.

A sorfejtésben az x értékét a **kvadrupól momentumig** vegyük, és vegyük azt az egyszerű esetet, amikor a két objektum tömege azonos $m_1 = m_2 = m$ és $r_1 = r_2 = r$. Ekkor a dipólmomentum értéke zérus, és a kvadrupólé $M_2 = 2mr^2$ ezért:

$$x = \frac{9Gmr^2}{8\pi^2 f^2 d^4} cos(2\pi \cdot 2ft) \; + \; ... \quad . \tag{2.14}$$

Itt a felsőbb rendű tagokat elhagytuk, mivel r^3/d^5, r^4/d^6, ... egyre kisebb értékek.

A kettős tömegrendszer körül változik a newtoni gravitációs tér, és ezen változás 'rángatni' fogja az interferométer tükrét, valamint ennek kitérését (strain) fogja indukálni:

$$h = \frac{x}{L}, \tag{2.15}$$

ahol L az interferométer karhossza. Az indukált teret nem maguk a hullámok hozzák létre, hanem maga a newtoni gravitációs tér változása. Az így számolt 'strain' értéke:

$$h = \frac{9Gmr^2}{8\pi^2 f^2 d^4 L} \cdot \cos(2\pi \cdot 2ft). \tag{2.16}$$

Belátható, hogy az így számolt 'strain' alakja nagyon hasonlít az Einstein-egyenletekből levezetett alakra. Az előző összefüggésben az f a pörgési frekvenciát jelöli (amelynek értéke állandó). Észrevehető, hogy a gravitációs tér változásának jele $2f$ **frekvenciánál jelentkezik, hasonlóan a gravitációshullámok frekvenciájára**.

Tehát, ha van egy kettős tömegrendszerünk, mely állandó frekvenciával forog a tömegközéppont körül, úgy a **gravitációs, mind a newtoni elméletből számolt tér** változásának **frekvenciája azonos**. Tehát a gravitációs-hullámok detektálásánál bezavarhat a newtoni tér léte. **A newtoni tér** jelenléte egy zaj görbét eredményez, hatással van a gravitációs hullámokra is (**zavaró hatás**).

Vegyük azt a példát, hogy $m = 1000$kg, $f = 10^3$Hz, és $r = 1m$. ekkor a 'strain' amplitúdójának értékére kapjuk, hogy:

$$|h| = \frac{9Gmr^2}{8\pi^2 f^2 d^4 L} \approx \frac{10^{-14}}{d^4} \cdot \frac{1}{L} \text{ méter}. \tag{2.17}$$

Látható, hogy itt a 'strain' arányos $1/d^4$-el, míg a gravitációshullámoknál kiszámolt 'strain' $1/d$-el volt arányos azonos paraméter értékekre. Ebből az következik, hogy **a forrás közelében a newtoni járulék jelentős**, míg ahogy egyre inkább távolabb kerülünk a forrástól a newtoni hatás nagyobb mértékben d^4-el fog csökkenni, míg **a gravitációshullám által indukált 'strain'** arányosan fog csökkenni a távolsággal, és **hatása sokkal távolabbra is érzékelhető** lesz.

Ismerve a pörgési frekvencia értékét kapjuk, hogy a jel frekvenciája 2000 Hz, és ha figyelembe vesszük, hogy a jel terjedési sebessége a fénysebesség, kiszámolható, hogy λ hullámhossz értéke 10^5 m. Helyezzük a detektort egy hullámhosszúságnyi távolságra a forrástól ($d = \lambda = 10^5$ m), és legyen az interferométer karhossza 4 km. Ezen értékeknél mindkét esetre (newtoni tér változás, illetve gravitációshullám által indukált változás) a 'strain' értéke 10^{-38} nagyságrendű.

Tehát **ez az a pont**, ahol **a két hatás megegyezik**, ezért **minél távolabb** megyek az **egy hullámhossznyi távolságtól**, annál jelentősebben fog csökkenni a newtoni tér hatása, és **annál könnyebb lesz a gravitációshullámok jelenlétének kimutatása és megmérése**.

Összevetve a két módon számolt 'strain' értékeket láthatók a különbségek:

$$h_{\text{gravhull.}} = \frac{32\pi^2 f^2 G m r^2}{d c^4}, \tag{2.18}$$

$$h_{\text{newt.}} = \frac{9 G m r^2}{8\pi^2 f^2 d^4 L}. \tag{2.19}$$

Látható, hogy a távolság (d) mellett, az **értékek** lényegesen **eltérnek a forgási frekvenciák (f) területén** is. Amig az első ($h_{\text{gravhull.}}$) f^2-el arányos, addig a másik ($h_{\text{newt.}}$) $1/f^2$-el.

Következtetésképpen elmondható, hogy létezik egy **távolság határ**, amin kívül kell a detektort elhelyeznünk, hogy **mérni tudjuk a gravitációshullámok hatását**, és nem a newtoni tér változásából származó effektust. Láttuk, hogy az adott paraméter értékek mellett (és nagy d távolságokban) egy nagyon kis 10^{-38} nagyságrendű 'strain' indukálódna, amelyet a jelenlegi detektorokkal lehetetlen lenne kimérni. Feltevődik a kérdés, hogy akkor **csökkentsük a d távolságot**, igen ám, de akkor már **számolnunk kell a newtoni tér változásából eredő zajjal**.

Legkönnyebb kompakt nagy tömegű, egymás körül nagy frekvenciával forgó objektumok által keltett hullámok kimutatása, mert ilyen esetben kapnánk elégségesen nagy, jelenlegi detektoraink által kimutatható és mérhető 'straint'. Gondolunk itt **nagy távolságokban** levő, egymás körül **nagy frekvenciával keringő** neutron-csillag, masszív fekete-lyuk kettősőkre.

Visszatérve a Föld-Nap rendszer esetére, különböző okok miatt nem mutathatjuk, ki az ezen rendszerből származó gravitációshullámokat. Az első, mivel természetesen a rendszeren belül vagyunk, együtt forog detektorunk az egyik objektummal (a Földdel), de akkor mondhatnánk, hogy próbáljuk megmérni a Hold-Nap rendszerből származó hullámokat.

Itt jön be a második ok amiért nem tudnánk ezeket sem kimutatni. **Túl közel vagyunk a forráshoz**, ahol **jelentős a newtoni tér változásából eredő zaj**. Ezeken kívül még ott van az a tény, hogy a keringési frekvencia $1/365$ nap^{-1}, ami igen kis érték, és mivel a newtoni tér változásából származó 'strain' fordítottan arányos ennek négyzetével, míg a gravitációshullámok által indukált 'strain' ezzen négyzetértékkel egyenesen arányos, ismét arra a következtetésre jutunk, hogy ez lesz a **domináns effektus és nem a gravitációshullámok jelenléte**.

Végezetül még fontos azt is kiemelni, hogy ezen keringési frekvenciaérték annyira kicsi, hogy értéke jóval a detektorok érzékenységi határa alatt található.

[2]

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_wave#Wave_amplitudes_from_the_Earth-Sun_system.

[2] Raffai, P., S. Marka, R. Grossman, P. Kalmus, Z. Marka, J. Rollins, and V. Sannibale, Class. Quantum Grav. **24**, 2217 (2007), gr-qc/0701134.