Gravitációshullám-asztrofizika - Gravitációs hullámkeltés

Boldizsár Zoltán Attila[1, a]
[1]Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

PACS numbers:

I. BEVEZETÉS

A jegyzet ezen fejezetének célja annak vizsgálata, hogy milyen jellegű a gravitációs sugárzás, és hogy mi ennek az oka, mindezt az elektromágneses és gravitációs kölcsönhatás analógiájának segítségével. Továbbá megtekintünk két példát is: egy neutroncsillag-kettőst (várhatóan ez lesz az egyik leggyakoribb gravitációs hullámforrás) és egy esetleges laboratóriumi gravitációs-hullám generátort.
A jegyzet nagy része a [1] 9. fejezetének, valamint [3] 3. fejezetének magyar nyelvre fordításából ered. Továbbá nagy segítség volt a matematikai számítások pontos kifejtésében [2].

II. A GRAVITÁCIÓS HULLÁMOK KVADRUPÓL TERMÉSZETE

A Newton-féle gravitációs erő és a Coulomb-erő közti nagymértékű hasonlóság reményt kelthet bennünk abban, hogy analóg módon kezelhető a Maxwell-féle elmélet és az Általános Relativitáselmélet. Fontos dolgokat érthetünk meg a gravitációs hullámok természetéről azáltal, hogy az elektromágneses sugárzással analóg leírásban tárgyaljuk őket. Ez egy elég durva közelítés, elvégre az elektromágneses tér egy vektortér, míg a gravitációs tér tenzortér. Emellett már nagyon egyszerű szinten is vannak különbségek a kétféle kölcsönhatás közt, mint például az, hogy az elektromágneses jelenségkörben kétféle pólus/polaritás van: pozitív és negatív töltések, illetve északi és déli pólus, míg gravitációban ilyet nem tapasztalunk. De a közelítés mégis megfelel jelen céljainknak (főként Newtoni határesetben).
Lényegében azt fogjuk csinálni, hogy vesszük az ismerős elektromágneses példát és behelyettesítjük a Coulomb-erő helyébe annak gravitációs megfelelőjét.

Az elektromágneses elméletben egy mozgó töltésrendszerből származó sugárzás multipól tagok szerint sorbafejthető. Viszont a sorfejtéssel való közelítés csak távoli zónában érvényes, aminek feltételei:

- A forrás mérete ($r_{\text{forrás}}$) legyen sokkal kisebb a keltett hullámok hullámhosszánál (λ): $r_{\text{forrás}}/\lambda \ll 1$
- A forrástól mért távolság (d) legyen sokkal nagyobb a forrás méreténél: $r_{\text{forrás}}/d \ll 1$

A. Monopól sugárzások

Elektromágneses esetben ekkor az összes töltés időbeli változását kell vizsgálni:

$$\sum_i q_i = \text{áll.} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i q_i = 0 \tag{2.1}$$

Elektromos monopólsugárzás esetben a töltésmegmaradásnak kellene sérülnie, ami viszont zárt rendszer esetén nem lehetséges. Tehát ha az analógiánk helyes, akkor hasonló módon gravitációs monopól sugárzás sem létezhet a tömeg-megmaradás miatt. (Továbbá érdemesm megjegyezni, hogy mágneses monopólról sem tudunk.)

[a]Electronic address: lightside86@gmail.com

B. Dipól jellegű sugárzások

A legdominánsabb tag az elektromos dipól-sugárzás (a következő legerősebb momentumok, a mágneses dipól és az elektromos kvadrupól által kibocsátott mezők már egy $r_{\text{forrás}}/\lambda$ faktorral gyengébbek). Egy e töltéssel rendelkező és $\mathbf{a}$-val gyorsuló részecske esetén a dipól-tag változása $\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{a}$.

Általános esetben a kisugárzott energia pedig

$$E = \frac{1}{Rc^2}\left(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}\right) \times \mathbf{n} \tag{2.2}$$

ahol R a forrás és a megfigyelő közti távolság, $\mathbf{n}$ a forrásból a megfigyelő felé mutató normál vektor, $\mathbf{d}$ pedig az elektromos dipólmomentum, melyet a következő egyenletekkel definiálunk:

$$\mathbf{d} \equiv \sum_i q_i \mathbf{x}_i \equiv \int dV \varrho_q(\mathbf{r})\mathbf{r}. \tag{2.3}$$

ahol a szumma esetén q_i az i-edik részecske töltése, $\mathbf{x}_i$ pedig a részecske pozíciója, az integrálos kifejezésben pedig ϱ_q a töltéssűrűség az integrálás pedig a forrás térfogatára vonatkozik. A számunkra lényeges mennyiség a következő

$$L_{\text{elektromos dipól}} \sim e^2 \ddot{\mathbf{d}}^2 \tag{2.4}$$

ahol L az úgynevezett luminozitás (egységnyi idő alatt kisugárzott energia $\sim E^2$).
Ezek analógiájára definiálhatunk egyféle gravitációs dipólt a következő képen:

$$\mathbf{d}_g \equiv \sum_i m_i \mathbf{x}_i \equiv \int dV \varrho(\mathbf{r})\mathbf{r}. \tag{2.5}$$

ahol a szumma esetén m_i a nyugalmi tömege, $\mathbf{x}_i$ pedig a pozíciója az i-edik részecskének. Míg az integrálban $\varrho(\mathbf{r})$ az anyagsűrűség.
A (2.4) egyenlettel való analógia alapján a "gravitációs dipól" luminozitásának arányosnak kell lennie a $\mathbf{d}_g$ második időderiváltjával, habár a $\mathbf{d}_g$ első időderiváltja

$$\dot{\mathbf{d}} = \sum_i m_i \dot{x}_i \equiv \mathbf{p} \tag{2.6}$$

ahol $\mathbf{p}$ a rendszer eredő impulzusa, és mivel az impulzusnak zárt rendszerek esetében szintén meg kell maradnia, ezért ennek az időderiváltja is zérust kell adjon. Vagyis ebből az következik, hogy az elektromos dipólsugárzással analóg "gravitációs dipól" luminozitása zérus.

A következő legerősebb elktromágneses sugárzási tagok a mágneses dipól és az elektromos kvadropól, nézzük a mágneses dipólt. Egy általános töltéseloszlás esetén a mágneses dipólból eredő sugárzás luminozitása a mágneses dipólmomentum második időderiváltjával arányos

$$L_{\text{mágneses dipól}} \sim \ddot{\mu}^2 \tag{2.7}$$

ahol μ egy összeg (vagy integrál) egy töltéseloszlásra:

$$\mu = \sum_{q_i} (\text{a } q_i \text{ helye}) \times (q_i \text{ keltette áram}) \tag{2.8}$$

Képezhetünk egy analógiát a mágneses dipóllal is:

$$\mu = \sum_{A_i} (\mathbf{x}_i) \times (m_i \mathbf{v}_i) \equiv \int dV \varrho(\mathbf{r})\mathbf{r} \times \vec{v}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{J} \tag{2.9}$$

ahol $\mathbf{J}$ a rendszer teljes impulzusmomentuma. És mivel az impulzusmomentum szintén egy megmaradó mennyiség, ezáltal arra jutunk, hogy a mágneses dipólsugárzással analóg gravitációs sugárzás luminozitása is zérus. Ezekből következően semmilyen forrásnak nem lehet dipól jellegű gravitációs sugárzása.

C. Kvadrupól-sugárzás

Akár úgy is érezhetnénk, mintha lenne valami összeesküvés annak érdekében, hogy ne legyenek gravitációs hullámok, csakhogy kezdünk kifogyni a megmaradási tételekből. Magasabb rendű tagok talán végre fognak változni és keltenek gravitációs hullámokat.
Definiálhatjuk az úgynevezett *redukált kvadrupolmomentum*ot (azért hívják ”redukáltnak”, mert néhány konstans-faktorral kisebb, mint az egyéb népszerű kvadrupolmomentum-definíciók)

$$\boxed{I_{\mu\nu} = \sum_i m_i \left(x^i_\mu x^i_\nu - \frac{1}{3} r_i^2 \delta_{\mu\nu} \right) = \int_V dV \varrho(\mathbf{r}) \left(x_\mu x_\nu - \frac{1}{2} r^2 \delta_{\mu\nu} \right)} \tag{2.10}$$

$\sum_\mu I_{\mu\mu} = 0; \; I_{\mu\nu} = I_{\nu\mu}$

Felírhatjuk az (2.2) egyenlet gravitációs analógiáját a gravitációs sugárzás legerősebb megengedett momentumára:

$$\boxed{h_{\mu\nu} = \frac{2G}{Rc^4} \ddot{I}_{\mu\nu}} \tag{2.11}$$

Ez már zérustól különböző eredményeket ad, ahogy azt a konkrét példáknál is fogjuk látni.

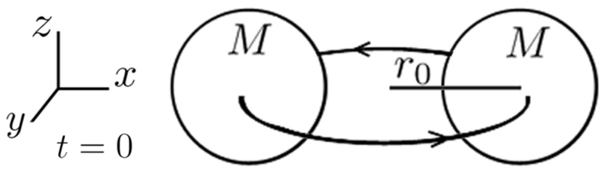
D. Magasabb rendek

Magasabb rendű (például oktopól) esetekre szintén bizonyítható hogy zérustól különböző járulékot adnak. A továbbiakban mi nem fejtegetjük ezt tovább, az érdeklődőknek lásd: [4] 9-es és 10-es fejezeteit.
Továbbá érdemes megjegyezni, hogy gömbszimmetrikus esetben zérus luminozitások adódnak. Vagyis ebből következően gömbszimmetrikus metrikus perturbációk sem kelthetnek gravitációs hullámokat. Tehát például egy nagy csillag kollapszusa gömbszimmetrikus, ezáltal nem kelthet gravitációs hullámokat.

III. KONKRÉT PÉLDÁK

A. Egy neutroncsillag kettős rendszer

A neutroncsillag kettős rendszert tekintsük úgy, hogy mindkét neutroncsillag tömege M, a keringési pályájuk sugara r_0 és keringési frekvenciájuk f. A szimmetriai egyszerűség kedvéért a két objektum keringési síkja essen egybe az $x-y$



1. ábra. Egy neutroncsillag kettős rendszer

síkkal és a kezdeti $t = 0$ időkoordinátában legyen mindkét objektum az x tengely mentén. Behelyettesítve a (2.10)-be (a tömegsűrűséget dirak delták összegeként kezeljük - pl.: pontszerű tömegeknek tekintjük a neutroncsillagokat) egyszerűen megmutatható, hogy

$$\boxed{I_{\mu\nu} = 2M \left(x^1_\mu x^1_\nu - \frac{1}{3} r_0^2 \delta_{\mu\nu} \right)} \tag{3.1}$$

$$\mu,\nu = 1 \quad \rightarrow \quad x_\mu = x = r_0 \cos(2\pi f t) \tag{3.2}$$
$$\mu,\nu = 2 \quad \rightarrow \quad x_\mu = y = r_0 \sin(2\pi f t) \tag{3.3}$$
$$\mu,\nu = 3 \quad \rightarrow \quad x_\mu = z \tag{3.4}$$

És most nézzük meg az egyes mátrixelemeket:

$$\rightarrow \quad I_{xx} = 2M\left[x(t)^2 - \frac{1}{3}r_0^2\right] = 2M\left[r_0^2\cos^2(2\pi ft) - \frac{1}{3}r_0^2\right] = 2Mr_0^2\left[\cos^2(2\pi ft) - \frac{1}{3}\right] \tag{3.5}$$

$$\rightarrow \quad I_{yy} = 2M\left[y(t)^2 - \frac{1}{3}r_0^2\right] = 2Mr_0^2\left[\sin^2(2\pi ft) - \frac{1}{3}\right] \tag{3.6}$$

$$\rightarrow \quad I_{xy} = I_{yx} = 2M(xy) = 2Mr_0^2\cos(2\pi ft)\sin(2\pi ft) = 2Mr_0^2\sin^2(4\pi ft) \tag{3.7}$$

$$\rightarrow \quad I_{zz} = -\frac{2}{3}Mr_0^2 \Leftrightarrow I_{zz} = -(I_{xx}+I_{yy}) = -\left(2Mr_0^2 - \frac{4}{3}Mr_0^2\right) = -\frac{2}{3}Mr_0^2 \tag{3.8}$$

$$\boxed{I_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}} \tag{3.9}$$

A (2.11) egyenletbe behelyettesítve az $I_{\mu\nu}$-re kapott egyenleteket magkaphatjuk a $h_{\mu\nu}$ elemeit. Először vizsgáljuk a zz esetet

$$h_{\mu\nu} = \frac{2G}{dc^4}\ddot{I}_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad h_{zz} = 0, \tag{3.10}$$

mivel az I_{zz} időben konstans és emellett az összes z-vel vegyes tag is zérust ad. A többi taggal viszont már számolni kell, először tekintsük az $I_{\mu\nu}$-k időderiváltjait

$$\dot{I}_{xx} = -2Mr_0^2 2\cos(2\pi ft)\sin(2\pi ft)2\pi f = -4\pi Mfr_0^2\sin(4\pi ft) \tag{3.11}$$

$$\ddot{I}_{xx} = -4\pi Mfr_0^2 4\pi f\cos(4\pi ft) = -16\pi^2 Mf^2r_0^2\cos(4\pi ft) \tag{3.12}$$

$$\ddot{I}_{yy} = 16\pi^2 Mf^2r_0^2\cos(4\pi ft) \tag{3.13}$$

$$\dot{I}_{xy} = \dot{I}_{yx} = 4\pi Mfr_0^2\cos(4\pi ft) \tag{3.14}$$

$$\ddot{I}_{xy} = \ddot{I}_{yx} = -16\pi^2 f^2Mr_0^2\sin(4\pi ft) \tag{3.15}$$

Most pedig írjuk le $h_{\mu\nu}$ elemeit

$$h_{\mu\nu} = \frac{2G}{dc^4}I_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad h_{xx} = -h_{yy} = -\frac{32\pi^2 f^2GMr_0^2}{dc^4}\cos(2\pi 2ft) \tag{3.16}$$

$$\rightarrow \quad h_{xy} = h_{yx} = -\frac{32\pi^2 f^2GMr_0^2}{dc^4}\sin(2\pi 2ft) \tag{3.17}$$

$$\rightarrow \quad h_{zz} = 0 \tag{3.18}$$

$$\boxed{h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ h_{yx} & -h_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \tag{3.19}$$

Érdemes még külön felírni az amplitúdót,

$$\boxed{|h| = \frac{32\pi^2 f^2GMr_0^2}{dc^4}} \tag{3.20}$$

és megjegyezin, hogy a gravitációs hullámok frekvenciája kétszer akkora, mint a keringési frekvencia, a kvadrupól jellegükből eredően.

$$\boxed{f_{GW} = 2f_{orb}} \tag{3.21}$$

Továbbá azt is érdemes megjegyezni, hogy ha a z tengely mentén mérünk, akkor egy cirkulárisan polarizált jelet tapasztalhatunk: $|h_{xy}| = |h_{xx}|$, és a kétféle polarizáció 45°-ban van elfordulva egymáshoz képest. Kevésbé speciális (nem a z-tengely vonalába eső) mérési hely esetén a polarizáció elliptikus, ha pedig a z tengely irányából az $x - y$

tengelyek síkja felé haladunk, akkor olyan elliptikus polarizációt láthatunk, mely folyamatosan megy át lineáris polarizációba.
Most pedig tekintsünk gyakorlati számértékeket: $f := 400Hz$, $G = 7 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2}$, $M = 1.4M_\odot \approx 3 \cdot 10^{30}kg$, (ez nem más, mint a Chandrasechar limit és azért válaztottuk ezt, mert ekkora tömegnél alakulnak át a Fehér Törpék neutroncsillagokká, és viszonylag sok ilyenről van tudomásunk) $r_0 \approx 20km = 20 \cdot 10^3 m$, $d := 15Mpc \approx 4.5 \cdot 10^{23} m$, ami pedig a Virgo halmaz távolsága, melyet a leggazdagabb forrástérésgnek gondolunk a "közelben" $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \to c^2 = 9 \cdot 10^{16} \approx 10^{17} \to c^4 \approx 10^{34}$

Most pedig nézzük meg a jel várható amplitúdóját:

$$|h| = \frac{32\pi^2 f^2 G M r_0^2}{dc^4} \approx \frac{3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1.6 \cdot 10^4 \cdot 10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{30} \cdot 4 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{23} \cdot 10^{34}} \approx 10^{-22} - 10^{-21} \tag{3.22}$$

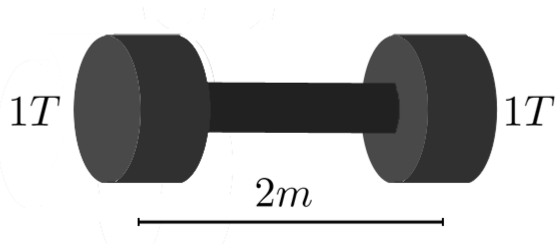
A h ugyan dimenziótlan, de a (3.20) egyenletben szereplő konstansok adnak egy célszerű mértékegység-skálát

$$[h] = \frac{R^2[km] f^2[Hz]}{r[Mpc]} \tag{3.23}$$

B. Heinrich Hertz nyomában?

A neutroncsillag-kettősre számolt $h \sim 10^{-21}$ elszomorítóan kicsi, de nem lehetelten elérni ezt az érzékenységet. Egyeseknek megfordulhat a fejében, hogy készítsenek egy gravitációs-hullám generátort, aminek a paramétereit, mint például az amplitúdó, frekvencia, vagy polarizáció tudnák kontrollálni és ezúton próbálnák tesztelni az általános relativitáselméletet. Maxwell 1964-ben jósolta meg (az akkor még ismeretlen) elektromágneses hullámok lehetségességét, és melyek létezését Heinrich Hertz bizonyította kísérletileg 1880-ban. Már korábban is erős érvek voltak amellett, hogy létezhetnek az elektromágneses hullámok, többek közt az is, hogy a Maxwell által jósolt sebességek közelítŐleg egyeztek a fénysebességgel.
Hertz azzal a kettős kihívással állt szemben, hogy mind egy kellő érzékenységű detektort, mind egy kellően erős forrást alkosson. Manapság, a már-már fillérs erősítők korában nehéz átérezni mekkora feladat volt ez abban a korban, amikor még nem létezett félvezető technika. Hertz adójának kimenő teljesítménye $16kW$ volt és mindössze a szoba egyik végéből a másik végébe küldött jeleket, ami manapság borzasztóan nagynak számít ekkora távolsára (viszonyításként a solti Kossuth adó kimenő teljesítménye $1kW$ és ezzel egész Magyarországot be lehet sugározni).
Az elektromágneses hullámok létének bizonyítása és majdani tanulmányzása vezetett a polarizáció és a különböző reflexiós jelenségek, az állóhullámok és sok egyéb jelenség felfedezésére.

Végezzünk egy egyszerű számítást annak érdekében, hogy lehetséges volna-e egy laboratóriumi gravitációs hullámgenerátor készítése. Képzeljünk el egy olyan súlyzót, melynek két végén egy-egy 1 tonnás ($1T$) súly van és azokat egy $2m$-es rúd köt össze, majd forgassuk meg ezt úgy, hogy a frekvencia legyen $1kHz$.



2. ábra. Egy esetleges laboratóriumi gravitációs hullámgenerátor

Ezen eszköz által keltett jel amplitúdója

$$|h_{\mu\nu}| = \frac{32\pi^2 f^2 G M r_0^2}{dc^4} \approx \frac{10 \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 10^{-10} \cdot 10^3 \cdot 1}{d \cdot 10^{34}} \approx 10^{-33} m \frac{1}{d} \tag{3.24}$$

volna. Még mielőtt azon kezdenénk el gondolkozni, hogy akkor vajon milyen közel kellene vinni a detektort, át kell gondolnunk még pár dolgot. A közelségi hatásoktól mentes hullámok csak a forrástól távol alakulhatnak ki. Az

$1kHz$-es jelek esetében azt kapjuk, hogy

$$\rightarrow \qquad f_{GW} = 2000Hz \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{2000 \frac{1}{s}} \approx 10^5 m! \tag{3.25}$$

Egy hullámhossznyi távolságban a jel amplitúgója viszont már csak

$$|h_{\mu\nu}| = 9 \times 10^{-39} \tag{3.26}$$

További felmerülő probléma, hogy a fellépő centrigugális erők széttépnének bármilyen általunk ismert anyagból készült rudat. Ezekből következően elég kivitelezhetetlennek tűnik egy laboratóriumi generátor készítése.

[1] Martin Hendry. *An Introduction to General Relativity, Gravitational Waves and Detection Principles*. University of Glasgow, UK, 2009.
[2] Péter Raffai. órai jegyzet, 2011.
[3] Peter R. Saulson. *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*. World Scientific Pub Co Inc, 1994.
[4] Bernard F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 1985.