

A gravitációs hullámok általános relativitáselméleti háttere II.

Szécsi Dorottya

szdpadt@inf.elte.hu

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

2011. május 23.

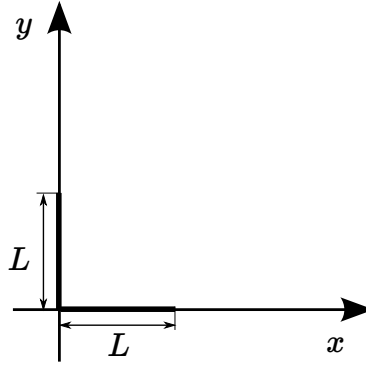
1. A gravitációs hullámok kölcsönhatása az interferométer lézerével

Az előző fejezetben megvizsgáltuk, hogyan hatnak kölcsön a gravitációs hullámok geodetikus mozgást végző tömegpontokkal. A gravitációs hullámok detektálása lézerinterferometriával történik, ezért elengedhetetlen annak vizsgálata, hogy ezek a hullámok hogyan hatnak kölcsön az interferométer lézerfényével.

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy egy hagyományos L-alakú detektor milyen módon detektálhat gravitációs hullámokat. Az elv a következő: a beérkező gravitációs hullám a lézernyalábokkal találkozik, és a két karban lévő lézernyaláb fáziskülönbségének méréséből következtethetünk a gravitációs hullám amplitúdójára. Ki fogjuk számolni a két karban haladó lézernyaláb között mérhető fáziskülönbséget egy optimális irányból és polarizációval beérkező gravitációs hullám esetén.

1.1. A fényutak fáziskülönbségének meghatározása

Vegyünk fel egy koordinátarendszert, melynek z tengelye mentén érkezik be a gravitációs hullám. Az x és y tengelyeknek megfelelő irányban állítsunk be két lézernyalábot egymásra merőlegesen, úgy, hogy közös forrásuk az origóban helyezkedik el. A nyalábok L utat tesznek meg a tükörig, amelyről azután visszaverődnek (lásd 1. ábra). Érdeemes kiemelni, hogy itt gyakorlatilag egy Michelson-interferométerről van szó. A két nyalábot egyszerre indítjuk, így egymással fázisban vannak. A rendszert vákuumba helyezzük.



1. ábra. A fényutak fáziskülönbségének meghatározására szolgáló kísérleti elrendezés elvi vázlata. A z tengely mentén érkezik be a gravitációs hullám, az x és y tengelyek irányában van a két lézernyaláb, közös forrásuk az origóban helyezkedik el. A nyalábok L utat tesznek meg a tükröig, amelyről azután visszaverődnek.

A z irányból érkező gravitációs hullám hatására a tükrökön oda-vissza verődő fénysugarak fázisváltozást szenvednek, mert a rendszeren áthaladó gravitációs hullám megváltoztatja a téridő metrikáját.

A metrikát két tenzor összegeként írhatjuk föl:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (1)$$

A (1) egyenletben $\eta_{\mu\nu}$ a sík téridő metrikáját jellemző Minkowski-tenzor¹, alakjára a következő előjelkonvenciót használjuk:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

továbbá $h_{\mu\nu}$ a gravitációs hullám által okozott metrikus perturbáció tenzora, melynek alakja igen egyszerű, ha figyelembe vesszük, hogy a hullám z irányból jön be, és a polarizációs irányai az x és y tengelyekkel esnek egybe:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{11} & h_{12} & 0 \\ 0 & h_{12} & -h_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

¹ Hermann Minkowski (1864. június 22. – 1909. január 12.) litván születésű német matematikus, aki megalkotta és kidolgozta a számok geometriáját, és geometriai módszereket alkalmazott bonyolult problémák megoldására a számelméletben, a matematikai fizikában és a relativitáselméletben. *Forrás: wikipedia.org*

A fényút mentén definíció szerint: $ds^2 = 0$. Írjuk föl a fényutat a metrika fenti (1) kifejezésével! (Megjegyzés: itt és a továbbiakban az Einstein-konvenciót követve a kifejezésekben szereplő azonos indexekre összegzést értünk.)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu. \quad (4)$$

Ezt az x tengely mentén haladó fény útjára felírva a következőt kapjuk:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + h_{11} dx^2 = 0. \quad (5)$$

Rendezzük át a fenti egyenletet úgy, hogy dt -t kifejezzük! Ez azért hasznos, mert nemsokára a integrálni fogunk a fényút mentén dt szerint.

$$dt = \frac{1}{c} \sqrt{1 + h_{11}} dx. \quad (6)$$

A lézernyalábot $t = 0$ időpillanatban engedjük útjára. Legyen τ az az időtartam, amíg a fény az interferométer tükreig megteszi az L távolságot.

$$\int_0^\tau dt = \frac{1}{c} \int_0^L \sqrt{1 + h_{11}} dx \approx \frac{1}{c} \int_0^L (1 + \frac{1}{2} h_{11}) dx = \frac{L}{c} + \frac{1}{2c} \int_0^L h_{11} dx. \quad (7)$$

Miután visszaverődött a tükörről, hasonló kifejezést írhatunk föl. Legyen τ_{rt} a lézernyaláb oda-vissza verődésének teljes ideje (roundtrip time).

$$\int_\tau^{\tau_{rt}} dt \approx \frac{L}{c} + \frac{1}{2c} \int_L^{2L} h_{11} dx. \quad (8)$$

A gravitációs hullám h mátrixának h_{11} elemét hullámfüggvényszerű alakban írhatjuk fel. Ekkor a kifejezésből a térszerű és időszerű komponenseket tartalmazó tagokat szorzatalakban felírva a következőt kapjuk:

$$h_{11} = h(t) e^{ikx} = h(t) e^{i2\pi f \frac{x}{c}}, \quad (9)$$

ahol $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c}$ a bejövő gravitációs hullám hullámszáma, f a frekvenciája. Ezzel elvégezzük az integrálást:

$$\int_0^\tau dt = \frac{L}{c} + \frac{h}{2c} \int_0^L e^{i2\pi f \frac{x}{c}} dx = \frac{L}{c} + \frac{h}{2c} \left[\frac{e^{i2\pi f \frac{x}{c}}}{i2\pi \frac{f}{c}} \right]_0^L = \frac{L}{c} + \frac{h}{4if\pi} (e^{i2\pi f \frac{L}{c}} - 1). \quad (10)$$

A visszaverődés utáni (8) kifejezést hasonlóképpen kiintegrálva:

$$\int_\tau^{\tau_{rt}} dt = \frac{L}{c} + \frac{h}{2c} \int_L^{2L} e^{i2\pi f \frac{x}{c}} dx = \frac{L}{c} + \frac{h}{2c} \left[\frac{e^{i2\pi f \frac{x}{c}}}{i2\pi \frac{f}{c}} \right]_L^{2L} = \frac{L}{c} + \frac{h}{4if\pi} (e^{i2\pi f \frac{2L}{c}} - e^{i2\pi f \frac{L}{c}}). \quad (11)$$

A $t = 0$ -tól $t = \tau_{rt}$ -ig eltelt idő a fenti két integrál összege:

$$\tau_{rt}^{(x)} = \int_0^\tau dt + \int_\tau^{\tau_{rt}} dt = \frac{2L}{c} + \frac{h}{4if\pi} (e^{i2\pi f \frac{2L}{c}} - 1). \quad (12)$$

Ugyanezt a számolást elvégezhetjük az y tengely mentén haladó lézernyalábra is, ekkor az integrálás dy szerint történik, és mivel (3) alapján $h_{22} = -h_{11}$, a $+$ jel $-$ jelre változik az eredményben:

$$\tau_{rt}^{(y)} = \frac{2L}{c} - \frac{h}{4if\pi} (e^{i2\pi f \frac{2L}{c}} - 1). \quad (13)$$

Mennyi az időkülönbség az x és y irányban történő visszapattanás között? Látható, hogy ez az időkülönbség éppen a fent kiszámolt (12) és (13) kifejezések különbsége:

$$\Delta\tau = \tau_{rt}^{(x)} - \tau_{rt}^{(y)} = \frac{h}{2if\pi} (e^{i2\pi f \frac{2L}{c}} - 1) = \frac{h}{\pi f} e^{i2\pi f \frac{L}{c}} \frac{e^{i2\pi f \frac{L}{c}} - e^{-i2\pi f \frac{L}{c}}}{2i}. \quad (14)$$

Itt az utolsó lépésben kiemeltünk $e^{i2\pi f \frac{L}{c}}$ -t. Most helyettesítsünk be $x = 2\pi f \frac{L}{c}$ -t, és vegyük észre, hogy éppen a szinuszfüggvény ismert kifejezését látjuk ($\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$). Ezzel:

$$\Delta\tau = \frac{2hL}{c} e^{ix} \frac{\sin x}{x}. \quad (15)$$

Az $\Delta\tau$ időkülönbségből a $\Delta\Phi$ fáziskülönbség a lézerfény f_l frekvenciájának ismeretében számolható:

$$\Delta\Phi = 2\pi f_l \Delta\tau = \frac{4\pi hL}{c} f_l e^{ix} \frac{\sin x}{x}, \quad (16)$$

ennek a valós részét kell vennünk:

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi hL}{c} f_l \cos x \frac{\sin x}{x}, \quad (17)$$

ahol

$$x = 2\pi f \frac{L}{c}. \quad (18)$$

Megjegyzés: Gyakran a lézerfénynek inkább a λ_l hullámhosszát használják az f_l frekvencia helyett. A fenti eredmény is kifejezhető a két mennyiség közötti összefüggés használatával: $f_l = \frac{\lambda_l}{c}$, a behelyettesítést az Olvasóra bízunk.

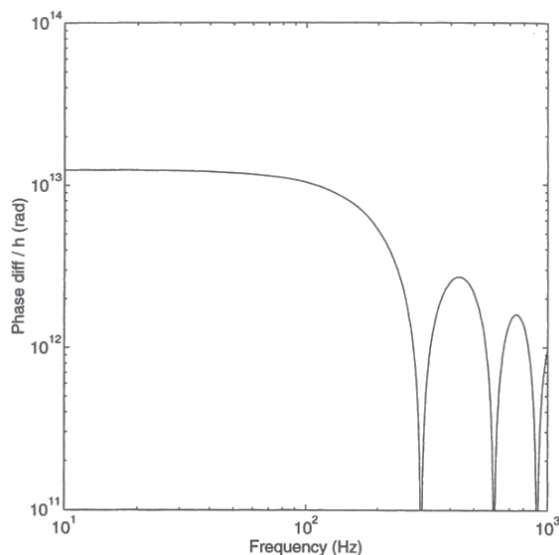
1.2. Az eredmény értelmezése

A bekeretezett egyenlet tehát azt írja le, hogy mekkora fáziskülönbség lép föl az egyébként azonos fázisban elindított x és y irányú lézernyaláb között akkor, ha például egy

$$h = h(t) = A_0 \cos(2\pi ft) \quad (19)$$

gravitációs hullám áthalad a rendszeren. Az egyenletből a gravitációs hullámok és a lézerdetektor kölcsönhatásának fontos tulajdonságait olvashatjuk le.

1. A fáziskülönbség a detektor L karhosszával arányos: $\Delta\Phi \sim L$.



2. ábra. Egy ideális Michelson-interferométer átviteli függvénye. Karhossz: $L=500$ km, lézervény hullámhossza: $\lambda_l = 0,5 \mu\text{m}$. Forrás: Peter R. Saulson – *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*, World Scientific, 1994.

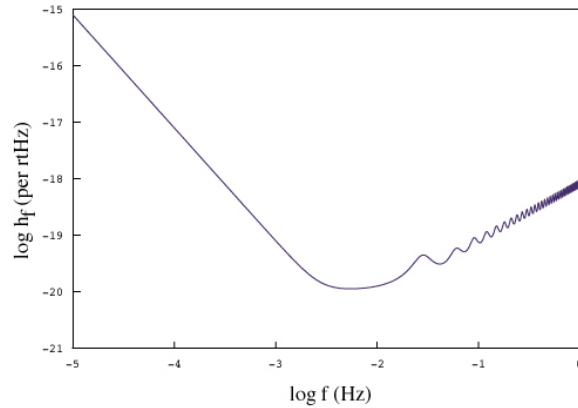
2. A fáziskülönbség a gravitációs hullám A_0 amplitúdójával arányos: $\Delta \Phi \sim h \sim A_0$.
3. Ha nem halad át gravitációs hullám ($A_0 = 0$), akkor $\Delta \Phi = 0$; de
4. előfordulhat, hogy $A_0 \neq 0$, de $\Delta \Phi = 0$ mégis, ha a $\sin x = \sin(2\pi f \frac{L}{c})$ vagy $\cos x = \cos(2\pi f \frac{L}{c})$ értéke nulla, azaz

$$2\pi f \frac{L}{c} = n \frac{\pi}{2}, \quad (20)$$

ahol n egész szám. Átrendezve feltételt kapunk a gravitációs hullám frekvenciájára:

$$f = \frac{nc}{4L}, \quad (21)$$

vagyis ezeken a diszkrét frekvenciákon érzéketlen a detektor. A LIGO esetében $L = 4 \cdot 10^3$ m, vagyis ez a műszer $f \approx n \cdot 10^4$ Hz frekvenciáknál nem tud detektálni gravitációs hullámot. Szerencsére a LIGO-nál az $n = 1$ -hez tartozó legalacsonyabb ilyen frekvencia is kívül esik az érzékenységi görbe számunkra érdekes tartományán, ezért ez az effektus érdektelen. Azonban például a LISA esetében, ahol $L = 5 \cdot 10^9$ m, vagyis $f \approx n \cdot 10^{-2}$ Hz, majd számolni kell ezzel a jelenséggel (lásd 3. ábra): a LISA elméletileg megjósolt és várt érzékenységi görbéjén ezért látunk bizonyos frekvenciáknál kiugró csúcsokat!



3. ábra. A LISA elméletileg meghatározott érzékenységi görbéje. A periodikusan ismétlődő csúcsok a (21) frekvenciafeltétel alapján értelmezhetők. Forrás: <http://www.srl.caltech.edu/shane/sensitivity/>

5. A detektáláshoz az kell, hogy a gravitációs hullám frekvenciája ne változzon jelentősen, amíg végbemegy az oda-vissza pattanás:

$$2\pi f\tau_{rt} \ll 1, \quad (22)$$

azaz mivel $\tau_{rt} \approx \frac{c}{2L}$ és $f = \frac{c}{\lambda}$, az egyenlet átrendezésével:

$$\lambda \gg L. \quad (23)$$

Ez azt jelenti, hogy a gravitációs hullám λ hullámhosszának jóval nagyobb-nak kell lennie, mint az L detektor-karhossznak, hogy detektálni tudjuk. Ez elméletileg igaz a jelenlegi detektorokra és a várt gravitációs hullámokra.

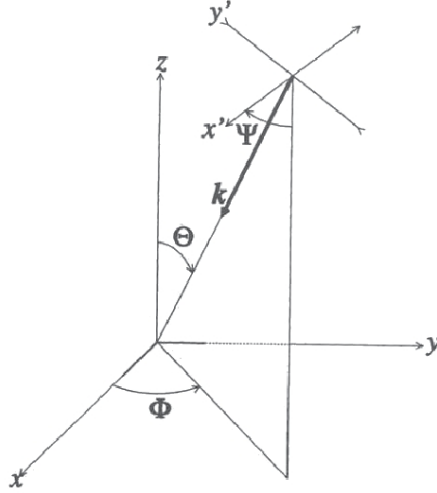
2. A gravitációs hullám detektorok irányérzékenysége, antenna faktorok

2.1. Irányérzékenység

A fenti eredmény arra az idealizált esetre vonatkozott, amikor a gravitációs hullám a detektorra merőlegesen érkezik. Természetesen ez a gyakorlatban nem így történik, ezért ezzel az effektussal korrigálni kell az eredményünket.

A módszer a következő: a tetszőleges irányból beérkező gravitációs hullámot egy vetítéssel a számunkra kedvező (a fent használt) koordináta-rendszerbe transzformáljuk. A vetítés a 4. ábra alapján történik.

A vetítés konkrét levezetését mellőzzük, mert ez a 4. ábra alapján némi gondolkodással elvégezhető. A vetítés végeredményét azonban megadjuk, vagyis



4. ábra. A két koordináta-rendszer kapcsolata. xy -rendszerben van az interferométer két ága, és $x'y'$ -rendszer szerint érkezik be a gravitációs hullám. Forrás: Peter R. Saulson – *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*, World Scientific, 1994.

főljük, hogy milyen új h_{11} és h_{22} értékekkel kell kiszámolni a $\Delta\Phi$ -t (lásd még a (9) egyenletet).

$$h_{11} = h(t)e^{ikx} [\cos 2\Phi(\cos^2 \Psi - \sin^2 \Psi \cos^2 \Theta) - \sin 2\Phi \sin 2\Psi \cos \Theta], \quad (24)$$

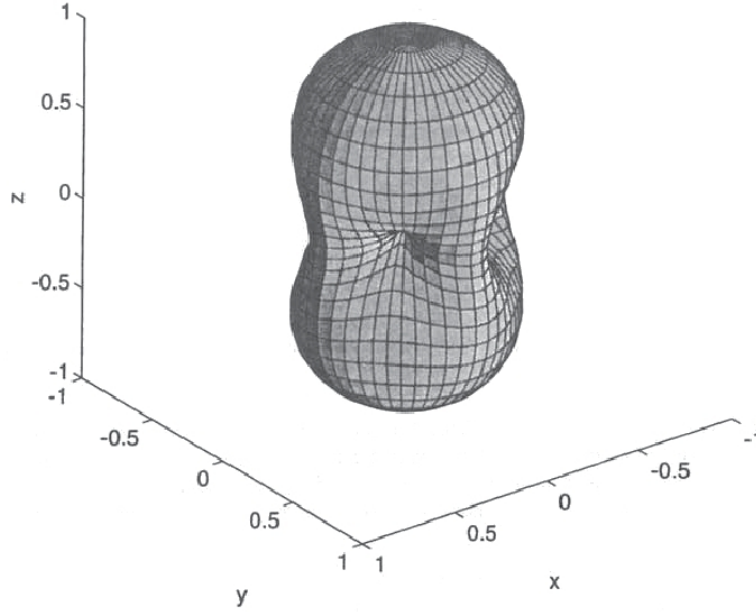
$$h_{22} = h(t)e^{iky} [\cos 2\Phi(\sin^2 \Psi - \cos^2 \Psi \cos^2 \Theta) + \sin 2\Phi \sin 2\Psi \cos \Theta]. \quad (25)$$

Ezekkel elvégezve a fenti levezetést, $\Delta\Phi$ -re a következő kifejezést kapjuk (lásd még a (17) egyenletet):

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi hL}{c} f_l \cos x \frac{\sin x}{x} \cdot \left[\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \Theta) \cos 2\Phi \cos 2\Psi - \cos \Theta \sin 2\Phi \sin 2\Psi \right]. \quad (26)$$

Vegyük észre, hogy a $\Theta = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ esetben visszkapjuk az ideális esetet, ez annak felel meg, hogy a gravitációs hullám a z tengely irányából, az x és y irányoknak megfelelő polarizációval érkezik be. Egy másik érdekes és fontos eset, ha a hullám a detektor két szára által kifeszített derékszög szögfelezőjének irányából érkezik, ez megfelel a $\Phi = 45^\circ$ értéknek: ilyenkor nincs fázistolás, $\Delta\Phi = 0$!

Ezzel az interferométer irányérzékenységét adtuk meg, melyet 5. ábra is jól szemléltet.



5. ábra. Az interferométer irányérzékenysége (polarizálatlan gravitációs hullámra, a karok az $x - y$ irányban állnak; Ψ -re átlagolással készítették az ábrát). Forrás: Peter R. Saulson – *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*, World Scientific, 1994.

2.2. Antennafaktorok

Eddig nem vettük figyelembe a gravitációs hullám polarizációját, illetve azt feltételeztük hallgatólagosan, hogy a polarizáció $x - y$ iránya a koordinátarendszer $x - y$ irányát követi. Általános esetben azonban ez nem így van. A probléma megoldását jelenti az az ötlet, hogy bármilyen polarizáltságú gravitációs hullám kikeverhető a két szokásosan használt (+ és \times) polarizációs irány szuperpozíciójaként:

$$h(t) = F_+ h_+(t) + F_\times h_\times, \quad (27)$$

ahol a lineáris együtthatókat *antennafaktorok* hívjuk, értékük függ a hullám beérkezési irányától, és legfeljebb 1 lehet:

$$F_+ = F_+(\Theta, \Phi), \text{ és } F_+ \in [0, 1]; \quad (28)$$

$$F_\times = F_\times(\Theta, \Phi), \text{ és } F_\times \in [0, 1]. \quad (29)$$

A detektor tehát a h_{11} és h_{22} komponenseket tudja mérni, ezekből h_+ és h_\times értékek az antennafaktorok ismeretében számolhatók. A fentiek alapján

azonban felmerülhet a kérdés, hogy honnan ismerjük az irányfüggő antennafaktorokat, ha nem tudjuk azt sem, hogy honnan érkezik a gravitációs hullám jel? Ennek kiküszöbölésére kétféle keresési módszert használnak.

- Célzott keresés: Akkor beszélünk célzott keresésről, amikor (elsősorban elektromágneses mérésekből) ismert az asztrofizikai forrás valamilyen paramétere (pl. időpont, égi pozíció stb). Ekkor a gravitációs hullám jeleket ezeknek megfelelően célzottan keressük.
- Vak keresés: Ha olyan forrás jelét keressük, melyről nincs semmilyen (elektromágneses mérésekből származó) információnk. Ilyenkor egyszerűen pásztázunk az égbolton a detektorral, jelre vadászva.