

GRAVITÁCIÓSHULLÁM-ASZTROFIZIKA

HÁZI DOLGOZAT

Gravitációshullám-kitörések paramétereinek becslése

Bécsy Bence*

Fizika BSc

Eötvös Loránd Tudományegyetem

*becsybence@caesar.elte.hu

1. Bevezetés

A közeljövőben várhatóan észlelhető gravitációs hullámok egy jelentős része tranziens jellegű, azaz az észlelési időhöz képest rövid idő alatt lezajlik. Ezek hullámformája szükségszerűen függ valamilyen, a forrást leíró paramétereiktől, ezért ha megtörténik a detektálás, fontos feladat ezen paraméterek rekonstrukciója. A rekonstruált paramétereiből a forrás fizikai tulajdonságaira következtethetünk, így ez a terület elengedhetetlen, ha a későbbiekben asztrofizikai megfigyeléseket szeretnénk végezni gravitációshullám-detektorokkal. Emellett a paraméterbecslésnek a gravitációshullám-felfedezések elektromágneses észlelésekkel való megerősítésében is szerepe lehet. Ahhoz, ugyanis hogy a távcsövek megtalálják a forrást, az égi irány minél pontosabb becslésére van szükségünk, amit a paraméterbecslés tud szolgáltatni.

A dolgozat első felében a paraméterbecslés elméletével foglalkozok, míg a másodikban gyakorlati szempontból vizsgálom meg a gyengén modellezett tranziens gravitációs hullámok (gravitációshullám-kitörések) paraméterbecslésének kérdését. A 2. részben áttekintem a továbbiak megértéséhez elengedhetetlen matematikai eszközt, nevezetesen a Bayes-statisztikát. A 3. részben röviden tárgyalom a paraméterbecslés elméletét, a különböző paraméterbecslési eljárásokat, továbbá Fisher-mátrixok segítségével rámutatok a paraméterrekonstrukció elméleti hatáira. A 4. részben bemutatom a legfontosabb kitörésekre specializált paraméterbecslő algoritmusokat. Végül a 5. részben az égi irány becslést mutatom be röviden.

2. Bayes-statisztika

A paraméterbecslés problémáját a Bayes-statisztika keretein belül tárgyaljuk, ezért ebben a fejezetben röviden áttekintjük a Bayes-statisztika alapjait, olyan szinten ami a paraméterbecslés megértéséhez elengedhetetlen. A terület részletes leírása, és összehasonlítása a klasszikus statisztikával megtalálható a [1] hivatkozásban.

A Bayes-statisztika alapja a Bayes-tétel (lásd pl. [1]-ben), amely egy feltételes valószínűség és fordítottja között teremt kapcsolatot. Induljunk ki a feltételes valószínűségek definíciójából:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad (1)$$

ahol $P(A|B)$ az A esemény bekövetkezésének valószínűsége, amennyiben B esemény bekövetkezett; $P(AB)$ az A és B események együttes bekövetkezésének valószínűsége, $P(B)$ pedig B esemény bekövetkezésének valószínűsége.

Ha ezt átrendezzük azt kapjuk, hogy:

$$P(AB) = P(A|B)P(B) \quad (2)$$

Mivel az, hogy az A esemény a B eseménnyel együtt következik be, ugyanaz mint amikor a B esemény az A eseménnyel együtt következik be, azaz $AB = BA$, így $P(AB) = P(BA)$. Innen

(2)-t felhasználva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \quad (3)$$

A (3) egyenletet átrendezve kapjuk a Bayes-tételt:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (4)$$

Érdemes megjegyezni, hogy a Bayes-tétel a klasszikus statisztikában is ismert, azonban ott jelentősége kisebb, mint a Bayes-statisztikában. A klasszikus statisztikában a valószínűségeket az alábbi módon vezetjük be. Végezzünk el egy kísérletet N -szer egymás után, és figyeljük meg egy adott esemény hányszor következik be, ezt jelöljük n -el. A $k = n/N$ arányt relatív gyakoriságnak nevezzük. Ez a relatív gyakoriság újabb kísérleteket elvégezve ingadozni fog, azonban ha a kísérletek számával tartunk a végtelenhez, akkor a relatív gyakoriságok egy adott számhoz fognak tartani, és ezt a számot nevezzük az esemény valószínűségének.

Ezzel szemben a Bayes-statisztikában a valószínűség az adott esemény bekövetkezésébe vetett hitünket jellemzi [1]. Mivel így a valószínűség értelmezéséhez nincsen szükségünk relatív gyakoriságokra, ezért van értelme hipotézisek valószínűségéről beszélni. Így a Bayes-tétel összeköti egy hipotézisbe vetett hitünket egy adott információ (például megfigyelési adat) megszerzése előtt és után. Ha például a H hipotézisbe vetett hitünket vizsgáljuk, miközben egy megfigyelésből D adat birtokába jutunk, akkor

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D)}, \quad (5)$$

ahol:

- $P(H)$ a megfigyelés előtti avagy *a priori* valószínűség
- $P(H|D)$ a megfigyelés utáni avagy *a posteriori* valószínűség
- $P(D|H)$ pedig a megfigyelés hatása avagy a *likelihood* függvény.

3. A paraméterbecslés elmélete

Egy gravitációs hullám észlelésekor fontos feladat a forrást leíró paraméterek megbecslése, hiszen ezek hordoznak asztrofizikai szempontból érdekes információt. Alábbiakban egy ilyen paraméterbecslés elméleti tárgyalását tekintjük át, amely nem kizárólag kitörés típusú gravitációs hullámokra alkalmazható. A paraméterbecslés elméletéről a [2] hivatkozásban található bővebb információ.

Mivel a paraméterek a forrást leíró modell részei, ezért 2. részben tárgyaltak szerint sejthető, hogy a problémát csak a Bayes-statisztika keretei közt tudjuk tárgyalni. Mivel a forrást leíró paraméterek általában folytonosak, ezért az előzőektől eltérően most nem valószínűségekkel, hanem

sűrűségfüggvényekkel fogunk dolgozni. Célunk a paraméterekre vonatkozó *a posteriori* sűrűségfüggvény meghatározása, hiszen ez éppen azt mondja meg, hogy a megfigyelés ismeretében a paraméterek különféle értékei milyen valószínűségűek. Ehhez az alábbiakban a *likelihood* függvényt fogjuk meghatározni. Természetesen az *a posteriori* sűrűségfüggvény az *a priori* eloszlástól is függ, de ez jobban az adott problémához kapcsolódik és nem tárgyalható általánosságban, így csak néhány megjegyzést teszünk majd róla a későbbiekben. A vizsgált hipotézis tehát az, hogy egy észlelt gravitációshullám-jel paramétereinek valódi értékei a θ_t N elemű halmazban megadott paramétereket veszik fel (a t index az angol *true* (magyarul: valódi) szóra utal). Feltesszük, hogy a gravitációshullám-detektor $n(t)$ kimeneti zaja stacionárius és zérus átlagú Gauss-eloszlást követ. Ekkor zaj valószínűségi eloszlását az alábbi képlet adja meg:

$$p(n_0) = \mathcal{N} \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{|\tilde{n}_0(f)|^2}{S_n(f)/2} \right], \quad (6)$$

ahol n_0 az n egy konkrét megvalósulása, \mathcal{N} egy normálási együttható, $\tilde{n}_0(f)$ a konkrétan megvalósuló zaj kétoldali teljesítményspektrum-sűrűsége, $S_n(f)$ pedig a detektor érzékenységgörbájéből számolt zaj kétoldali teljesítményspektrum-sűrűsége [3]. Ennek definíciójából következik [2], hogy $\langle n^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} df S_n(f)/2$, és mivel azt várjuk, hogy $\langle n(t) \rangle = 0$, ezért a zaj varianciája:

$$\text{Var}[n(t)] \equiv \langle n^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} df S_n(f)/2 \quad (7)$$

Definiáljuk az alábbi skalárszorozást:

$$(A, B) = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{\tilde{A}^*(f)\tilde{B}(f)}{(1/2)S_n(f)} = 4 \text{Re} \int_0^{\infty} df \frac{\tilde{A}^*(f)\tilde{B}(f)}{S_n(f)} \quad (8)$$

Ahol a második egyenlőségnél áttértem kétoldali spektrumsűrűségekről egyoldaliakra [3].

Belátható, hogy erre a műveletre igazak az alábbi műveleti tulajdonságok:

1. $(A, B) = (B, A)$
2. $(A + B, C) = (A, C) + (B, C)$
3. $(\lambda A, B) = \lambda(A, B)$

Látható, hogy az így értelmezett skalárszorozással az (6) egyenlet az alábbi egyszerűbb alakban írható:

$$p(n_0) = \mathcal{N} \exp \left[-\frac{(n_0, n_0)}{2} \right] \quad (9)$$

Érdeemes meggondolni, hogy a (6) képlet szemléletesen azt jelenti, hogy kiszámoljuk egy konkrét n_0 megvalósulásra kapható jel-zaj arány (angolul *Signal to Noise Ratio* vagy *SNR*) valószínűségét [4].

Tegyük fel, hogy a detektor kimenete megfelel a detektálás kritériumainak, így az alábbi alakban írható:

$$s(t) = h(t; \theta_t) + n_0(t), \quad (10)$$

ahol $h(t; \theta_t)$ a gravitációs hullám strain amplitúdója, θ_t az ismeretlen θ paraméterek valódi értékei, így mind θ_t , mind θ annyi elemű halmazok, ahány paraméter jellemzi a hullámformát.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért eltekintek az időfüggés jelölésétől. Innen az $n_0 = s - h(\theta_t)$ (9)-ba való behelyettesítésével kapható annak a valószínűsége, hogy s a kimenet, ha θ_t paraméterekkel leírható gravitációs hullám van jelen az adatban. Ez pedig éppen a keresett *likelihood* függvény:

$$\Lambda(s|\theta_t) = \mathcal{N} \exp \left[-\frac{(s - h(\theta_t), s - h(\theta_t))}{2} \right] \quad (11)$$

A $h_t = h(\theta_t)$ jelölést bevezetve, és kihasználva a fenti 1-es és 2-es műveleti tulajdonságot:

$$\Lambda(s|\theta_t) = \mathcal{N} \exp \left[(h_t, s) - \frac{(h_t, h_t)}{2} - \frac{(s, s)}{2} \right] \quad (12)$$

Innen az *a posteriori* eloszlást egy normálási tényezőtől eltekintve úgy kapjuk, ha a *likelihood*-ot leosztjuk az adott jel valószínűségével és beszorozzuk az *a priori* eloszlással (utóbbira bevezetjük a $p^{(0)}(\theta_t)$ jelölést, ahol a felső indexbe írt nulla az *a posteriori* eloszlástól való megkülönböztetés céljából szerepel). Ez a paraméterek gravitációshullám-jel észlelése előtt feltételezett eloszlása. Például a gravitációshullám-forrás tőlünk mért r távolságára *a priori* eloszlás lehet homogén forráseloszlást feltételezve a $p^{(0)}(r) \propto r^2$, vagy közeli a Tejútrendszeren belüli forrásokat vizsgálva a $p^{(0)}(r) \propto r$. Egy másik jellemző paraméter a gravitációshullám-jel forrásának tömege, ami például egy neutroncsillag esetében csak szűk határok között mozoghat, így ezt az előzetes tudásunkat beépíthetjük az analízisbe az *a priori* eloszlás segítségével.

Így a θ_t valódi paraméterek *a posteriori* valószínűségi eloszlására, adott s detektorkimenet mellett az alábbi összefüggést kapjuk:

$$p(\theta_t|s) = \mathcal{N} p^{(0)}(\theta_t) \exp \left[(h_t, s) - \frac{(h_t, h_t)}{2} \right] \quad (13)$$

Tehát levezettük a paraméterek *a posteriori* valószínűségeloszlását. Ez minden információt tartalmaz a becsülni kíván paraméterekről, azonban sok esetben ebben a formában nem értelmezhetőek az eredmények, főleg, ha a paraméterek száma nagy. Ezért érdemes olyan összefüggéseket levezetni, amelyek kevesebb információt tartalmaznak ugyan, de könnyebben értelmezhetőek. Ilyen lehet például a θ_t paraméterek legvalószínűbb értéke, amit $\hat{\theta}$ -pal jelölünk. Az, hogy mi θ_t legvalószínűbb értéke, többféleképpen is definiálható. Az adott definíció szerint legvalószínűbb paraméterértéket esztimátornak nevezzük. Sokféle ilyen esztimátor definiálható, amelyeknek

azonban bizonyos elveknek meg kell felelniük. Én itt a két legkézenfekvőbb esztimátort tárgyalom, azt, amely esetén az eloszlásfüggvény felveszi a maximumát (lásd a 3.1. részben), és azt, amely θ_t átlaga a teljes eloszlásra (lásd a 3.2. részben).

3.1. A *likelihood*-ot vagy az *a posteriori* eloszlást maximalizáló esztimátor

Tegyük fel, hogy az *a priori* valószínűség lapos. Ekkor az *a posteriori* valószínűség maximalizálása azonos a $\Lambda(s, \theta_t)$ *likelihood* függvény maximalizálásával. A *likelihood*-ot maximalizáló paramétereket $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ -el jelöljük.

A számolás megkönnyítése érdekében maximalizáljuk Λ helyett annak logaritmusát, ami az eredetivel ekvivalens probléma, hiszen a logaritmus függvény monoton növekvő:

$$\ln \Lambda(s|\theta_t) = (h_t, s) - \frac{(h_t, h_t)}{2} \quad (14)$$

Innen a fenti kifejezés deriválásával, felhasználva, hogy a (\cdot, \cdot) művelet lineáris, kapható, hogy a maximum feltétele az alábbi:

$$\frac{\partial(\ln \Lambda(s|\theta_t))}{\partial \theta_t^i} \equiv \left(\frac{\partial h_t}{\partial \theta_t^i}, s \right) - \left(\frac{\partial h_t}{\partial \theta_t^i}, h_t \right) = 0, \quad (15)$$

ahol θ_t^i az i -edik valódi paraméter.

Ez egy egyenletrendszer a különböző paraméterekre, ahol az egyenletek száma megegyezik a hullámformát leíró paraméterek számával. Néhány kivételtől eltekintve analitikusan nem oldhatóak meg, így jellemzően numerikusan kell kezelniük őket.

Az *a posteriori* eloszlás maximalizálása ehhez egészen hasonló probléma, csak valamilyen *a priori* eloszlást is figyelembe veszünk. Ettől azonban bonyolultabb lesz a számolás, és matematikai tulajdonságait tekintve kevésbé lesz szép a probléma. Például nem lesz mindegy, hogy minden paramétert maximalizálunk vagy csak egyet, mert a két esetben eltérő eredményt fogunk kapni.

3.2. Bayes-esztimátor

A korábbi esztimátorokkal szemben a Bayes-esztimátornak az az előnye, hogy ez minimalizálja a becsült paraméterek hibáit. A szokásos várhatóértéknek megfelelően, a paraméterek Bayes-esztimátor szerinti legvalószínűbb értékét az alábbi képlet adja:

$$\hat{\theta}_{\text{B}}^i(s) = \int d\theta \theta^i p(\theta|s), \quad (16)$$

ahol $\hat{\theta}_{\text{B}}^i$ az i -edik paraméter Bayes-esztimátor szerinti becsült értéke. A képlet átláthatósága érdekében a korábban használt t indexeket elhagytuk.

A becsült paraméterek hibáját az alábbi módon számolható kovariancia mátrixból tudhatjuk meg:

$$\Sigma_{\text{B}}^{ij} = \int d\theta [\theta^i - \hat{\theta}_{\text{B}}^i(s)] [\theta^j - \hat{\theta}_{\text{B}}^j(s)] p(\theta|s) \quad (17)$$

Ennek a módszernek előnye, hogy matematikailag jók a tulajdonságai. Ugyanazt a becsült értéket kapjuk egy adott paraméterre attól függetlenül, hogy a többi paramétert lerögzítjük, vagy marginalizációt végzünk rajtuk. Emellett, mint már említettük, ez a módszer minimalizálja a paraméterbecslés hibáját.

A módszer hátránya, hogy nagyon számításigényes, hiszen N db paraméter esetében az összes paraméter megbecsléséhez N db N dimenziós integrált kell kiszámolni, ezért mindig mérlegelnünk kell, hogy az adott feladatra melyik módszert érdemes alkalmazni.

3.3. Fisher-mátrixok

Nagy jel-zaj arányok esetén gyakorlatilag az összes esztimátor ugyanazt az eredményt kell, hogy adja, és azt várjuk, hogy ilyenkor nem függ a becsült paraméter értéke az *a priori* eloszlástól. Ebben a határesetben a paraméterbecslés hibájára egy egyszerű kifejezés kapható.

Ilyenkor a hibák kicsik, ezért feltehetjük, hogy $\theta^i = \hat{\theta}_{\text{ML}}^i + \Delta\theta^i$, ahol a maximális *likelihood* esztimátort használtuk, de igazából az eredményen nem változtat az, hogy konkrétan melyik esztimátorral dolgozunk. A fenti θ^i -ket beírva a (13) képlet exponensében lévő $h_t \equiv h(\theta_t)$ függvények argumentumába, az exponenciálist kifejthetjük a $\Delta\theta^i$ szerint. A lineáris tag elveszik, mivel a $\hat{\theta}_{\text{ML}}^i$ definíció szerint maximalizálja a *likelihood*-ot, így a kvadratikus az első tag aminek lesz járuléka:

$$p(\theta|s) = \mathcal{N} \exp \left[-\frac{1}{2} \Gamma_{ij} \Delta\theta^i \Delta\theta^j \right], \quad (18)$$

ahol bevezetve a $\partial_i = \partial/\partial\theta^i$ jelölést, $\Gamma_{ij} = (\partial_i \partial_j h, h - s) + (\partial_i h, \partial_j h)$. Látható, hogy $h - s = -n$, ezért nagy jel-zaj aránynál az összeg első tagja elhanyagolható, mivel a skalárszorzat második tagja $-n$, ami a h -hoz képest nagyon kicsi. Természetesen ez nem bizonyítás, részletesebb indoklásért lásd [2]-t. Így az alábbi alakot kapjuk:

$$\Gamma_{ij} = (\partial_i h, \partial_j h) \quad (19)$$

Ez az úgynevezett Fisher információ mátrix, amivel a hibák várhatóértéke az alábbi alakban fejezhető ki [2]:

$$\langle \Delta\theta^i \Delta\theta^j \rangle = (\Gamma^{-1})^{ij} \quad (20)$$

4. Paraméterbecslő algoritmusok

A gravitációs hullámok jellemzően a detektorok zajában nehezen észrevehetőek, ezért azok kinyerésére különböző keresőalgoritmusokat kell kifejleszteni. Ezek közül a keresőalgoritmusok közül némelyik paraméterbecslést is végez, azonban legtöbbjük egy gravitációs hullámnak vélt jelet továbbad egy paraméterbecslésre kifejlesztett algoritmusnak. Mint ebből látható, a keresőalgoritmusok és paraméterbecslő algoritmusok között nincs éles határ.

Mi ebben a részben a kitörés típusú gravitációs hullámokra specializálódott algoritmusok közül ismerkedünk meg a paraméterbecslés szemszögéből két legfontosabbal. Az itt tárgyaltakon kívül jelentős paraméterbecslő és egyben jelkereső algoritmus még a Coherent Wave Burst [5], amellyel azonban jelen dolgozatban nem foglalkozunk.

4.1. BayesWave

A BayesWaveBurst [6] (vagy BayesWave) egy paraméterbecslő algoritmus, amelynek alapvetően három feladata van. Az első, hogy kiszűrje az ún. glitch-eket. Ezek olyan tranzienst zajjelenségek, amelyek könnyen összetéveszthetők egy gravitációshullám-kitöréssel. A második feladata az algoritmusnak a hullámforma rekonstrukció, vagyis a jelet felépítő bázisfüggvényeket leíró paraméterek meghatározása, és ezáltal a gravitációshullám-jel alakjának előállítása. Végül az algoritmus égi irányt is becsül. Ez az ún. follow-up megfigyelések szempontjából igen nagy jelentőséggel bír [7]. Ezek azok a megfigyelések, amelyek egy detektált gravitációs hullámhoz tartozó elektromágneses sugárzást keresik teleszkópokkal. Mi ebben a részben a BayesWave paraméterbecslésére fogunk koncentrálni, míg az égi irány becslését a 5. részben tárgyaljuk.

A BayesWave algoritmus az s adatot úgy modellezi, mint a h gravitációshullám-jel, az n_G stacionárius Gauss-eloszlású zaj, és a g glitch-ek lineárkombinációját.

$$s = \hat{R}h + g + n_G, \quad (21)$$

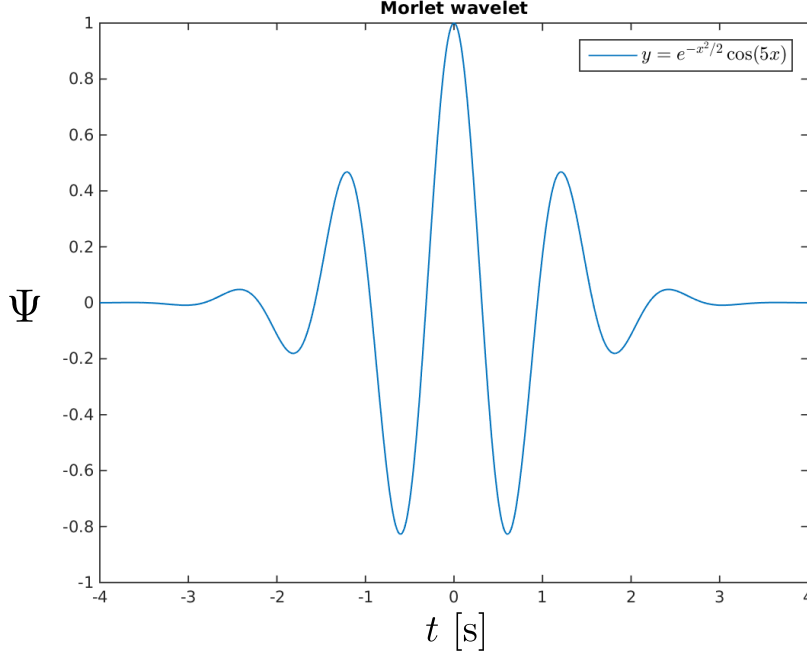
ahol \hat{R} az időkéstető (time-delay) operátor, ami adott detektorra megfelelő idővel eltolja a beérkező jelet. Erre azért van szükség, mert a gravitációs hullámok véges terjedési sebessége miatt a gravitációshullám-forrás irányától függően a detektorokba különböző időpillanatban érkezik meg a tranzienst jel.

A műszeres glitch-ek a zajban megjelenő tranzienst jelenségek. Ezek a glitchek jellemzően egy kompakt tartományt foglalnak el az idő-frekvencia síkon. Több modell is létezik ezek leírására, amelyek közül a BayesWave az úgynevezett Morlet-Gábor folytonos wavelet reprezentációt használja [8].

A Morlet-Gábor waveletek idő reprezentációban:

$$\Psi(t; A, f_0, \tau, t_0, \phi_0) = A e^{-(t-t_0)^2/\tau^2} \cos(2\pi f_0(t-t_0) + \phi_0), \quad (22)$$

ahol A az amplitúdó, t_0 a centrális idő, τ a jel időbeli hosszát jellemző paraméter, f_0 a centrális frekvencia, és ϕ_0 a fázistolás.



1. ábra: Morlet-Gábor wavelet $A = 1$, $t_0 = 0$ s, $\tau = \sqrt{2}$ s, $f_0 = 5/(2\pi)$ Hz, $\phi_0 = 0$ paraméterekkel.

A fenti waveletekből a hullámforma + polarizációja azok összegeként áll elő az alábbi módon:

$$h_+(f) = \sum_{j=0}^{N_s} \Psi(f; A_j, f_{0j}, \tau_j, t_{0j}, \phi_{0j}), \quad (23)$$

ahol N_s a jel rekonstrukciójához használt wavelet-ek száma. Az \times polarizációt azzal a feltevéssel kapjuk, hogy a gravitációs hullám elliptikusan polarizált (ez jellemzően jó közelítéssel igaz lesz):

$$h_{\times} = \epsilon h_+ e^{i\pi/2} \quad (24)$$

A BayesWave algoritmus a transzdimenziós RJMCMC algoritmust használja a lehetséges modellek és modellparaméterek feltérképezésére, és ezáltal az *a posteriori* eloszlások meghatározására. Ez az algoritmus lényegében egy Markov Chain Monte Carlo (MCMC) algoritmus, amely azonban azt is tudja kezelni, ha az egyes lépésekben a modell dimenziója megváltozik. Az algoritmusról szemléletes bevezető található a [9] hivatkozásban.

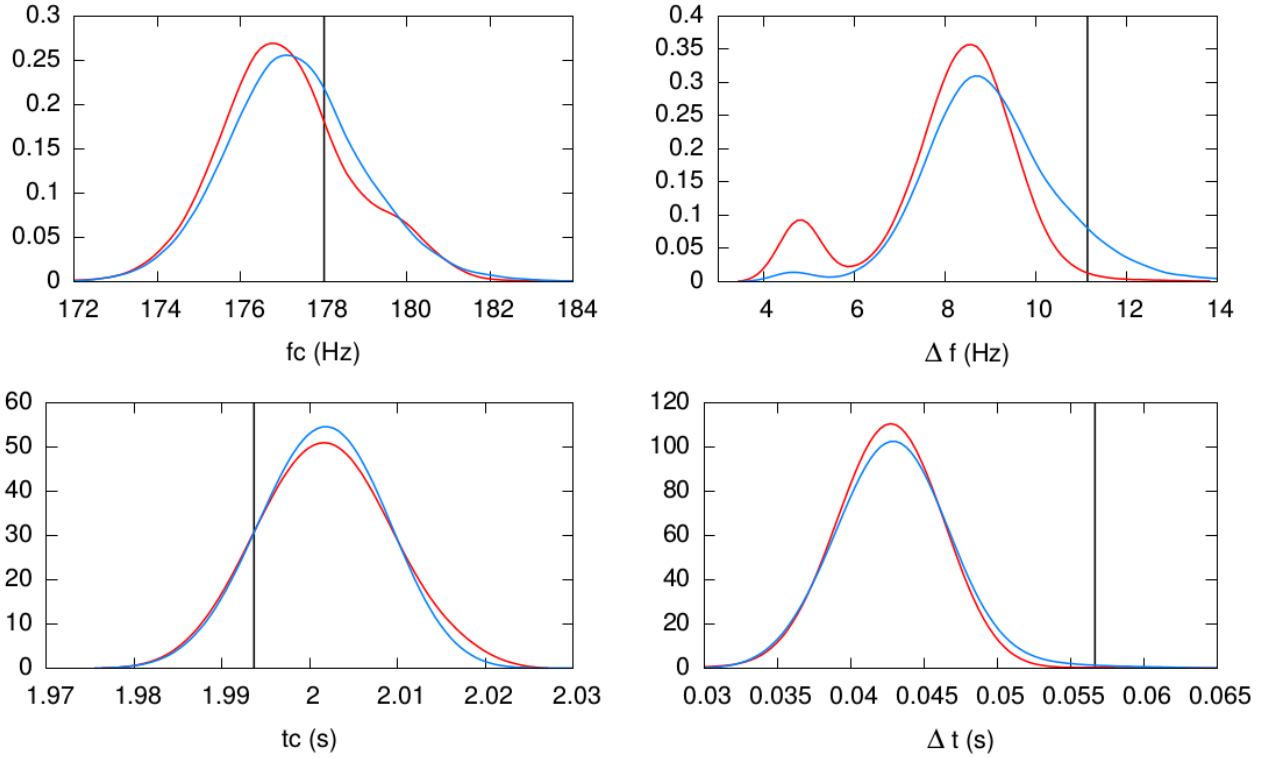
Az RJMCMC tehát nem csak adott számú wavelet-tel találja meg azok legvalószínűbb paramétereit, hanem azt is meghatározza, hogy hány wavelet-tel lehet legjobban leírni a jelet. Sőt, az RJMCMC algoritmus azon eseteket is egyszerre vizsgálja, amikor glitch és gravitációs hullám, csak glitch, csak gravitációs hullám, vagy csak Gauss-eloszlású zaj van az adatsorban.

Ilyen módon azt, hogy mi a favorizált modell (csak glitch, csak gravitációs hullám, stb.) abból kapjuk meg, hogy az RJMCMC hány lépésig volt az egyes modellekben. Ez alapján például

megadható, hogy mennyivel tartjuk valószínűbbnek, hogy gravitációs hullám van a jelben, mint azt, hogy glitch. Ezt az arányt nevezzük Bayes-faktornak.

Mivel a BayesWave nem modellezett források keresésére van kitalálva, ezért a forrást leíró fizikai paramétereket közvetlenül nem kapjuk meg a paraméterbecslésből, csak a wavelet-paraméterek posterior eloszlását. Emellett az algoritmus megadja a posterior eloszlásokat a $h(t)$ jelre, a $g(t)$ glitchekre, és a forrás égi irányára és polarizációjára.

A $h(t)$ rekonstruált hullámformából azonban megkaphatjuk a kitöréseket leíró legegyszerűbb paramétereket. Ezek a t_c centrális idő, f_c centrális frekvencia, Δt időtartam, és Δf sáv szélesség. A 2. ábra egy szimulált haranggörbe burkolójú fehér-zaj kitörésre számolt *a posteriori* eloszlásokat mutatja. Jól látható, hogy a BayesWave algoritmus a centrális időt és frekvenciát elég jól megbecsüli, de a sáv szélességet és az időtartamot szisztematikusan alábecsüli.



2. ábra: A BayesWave algoritmus által rekonstruált centrális idő (t_c), centrális frekvencia (f_c), időtartam (Δt), és sáv szélesség (Δf) paraméterek egy $SNR = 15$ jel-zaj arányú, haranggörbe burkolójú fehér zaj kitörésre. A piros és kék vonalak két különböző *a priori* eloszlással készült eloszlásokat mutatják. A függőleges fekete vonalak a jelek legenerálásakor használt paraméterértékeket jelölik. [6]

4.2. LIB

A LIB (LAL Inference Burst) egy paraméterbecslő és modellkiválasztó algoritmus, amely a bespirálozó kettősök összeolvadására (compact binary coalescence, CBC) kifejlesztett LAL Inference algoritmus átdolgozásával jött létre [10]. A LIB algoritmus paraméterbecslés mellett jelkeresést is végez az Omicron algoritmussal együttműködve [11]. A LIB koherens keresést végez haranggörbe burkolójú szinusz mintafüggvénnyel, és megadja az ún. bayes faktort, ami az algoritmus detektálási statisztikája (akkor van detektálás, ha, egy küszöbnél nagyobb). Emellett az algoritmus előállítja az ismeretlen paraméterek posterior eloszlását.

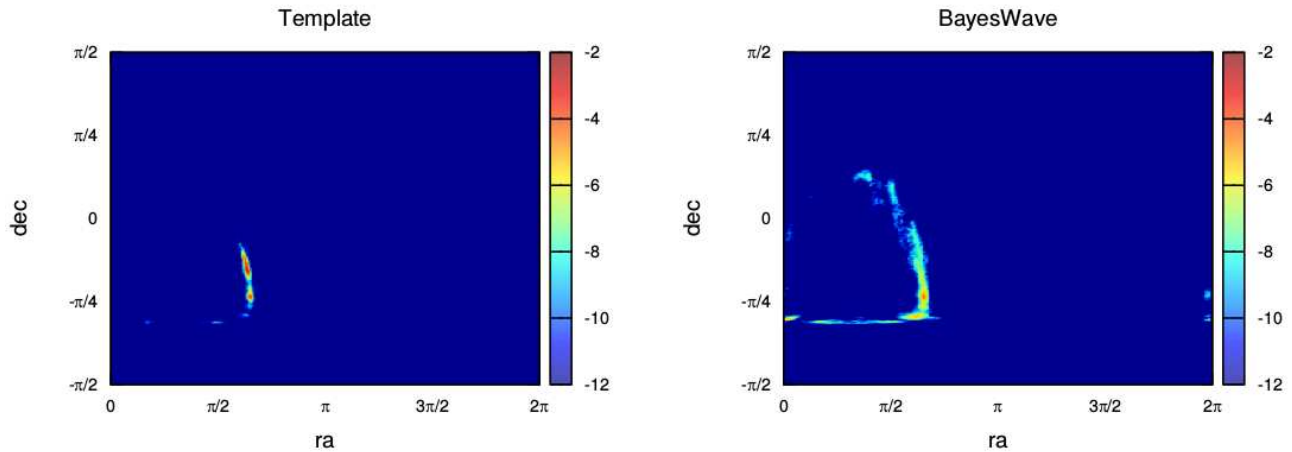
5. Égi irány becslés

A gravitációshullám-megfigyeléseket gyakran érdemes más megfigyelésekkel összevetni (pl. elektromágneses). Ezek egyik módja, hogy gravitációs hullám detektálás esetén riasztást kapnak egyes elektromágneses obszervatóriumok üzemeltetői, és megpróbálják megkeresni a forrás elektromágneses jelét. Ez az ún. follow up észlelés.

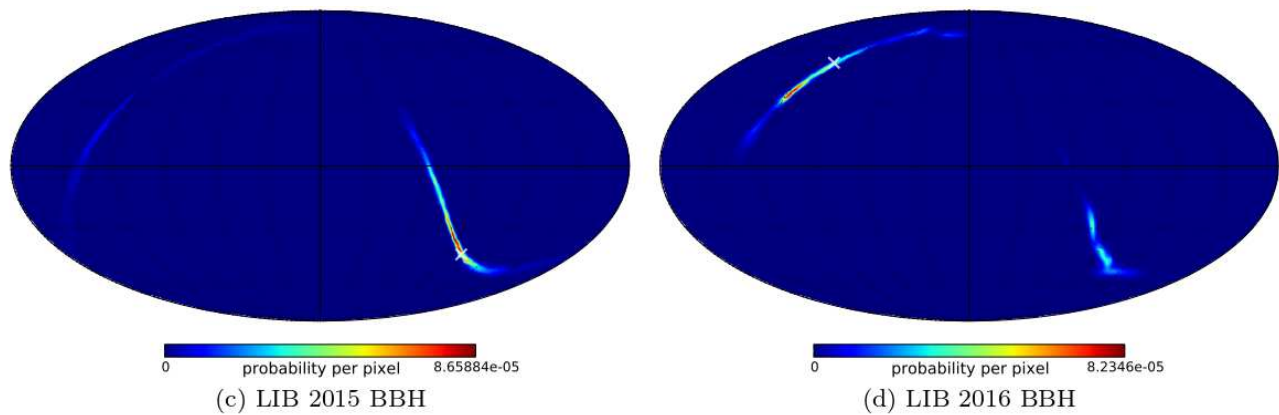
Ahhoz azonban, hogy az elektromágneses távcsövek meg tudják keresni a forrást, az égi irány minél pontosabb ismerete szükséges. Mivel a gravitációshullám-detektorok érzékenysége csak gyengén függ a forrás irányától, ezért ez nem olyan egyszerű feladat. Az égi pozíciót ezért csak több detektor észleléséből lehet meghatározni háromszögeléses módszerrel, kihasználva, hogy a gravitációs hullámok fénysebességgel terjednek. Az égi irányt (két szög) is a hullámformát leíró paraméternek tekintve, azt a paraméterbecslés módszereivel tudjuk meghatározni. A 3. ábra jobb oldalán a BayesWave által készített égi irány rekonstrukciós térképet láthatunk a „Big-Dog”, azaz nagy kutya fantázianevű, az adatokhoz mesterségesen hozzáadott (beinjektált) feketelyuk-kettős forrásról. Összehasonlításképpen az ábra bal oldalán látható a mintafüggvényes keresés által készített térkép. Jól látható, hogy a BayesWave eredménye összhangban van a mintafüggvényes keresés eredményével, azonban utóbbi lényegesen pontosabb. Ez érthető is, hiszen a BayesWave algoritmus a forrásról semmit nem feltételez, így sok információt elveszít azokhoz a keresésekhez képest, amelyek specifikusan feketelyuk-kettősöket keresnek.

A 4. ábrán a LIB algoritmus által készített égtérképek láthatóak, két különböző beinjektált feketelyuk-kettős jelre. A 2015-ös jel esetén két-detektoros rendszerről van szó, LHO és LLO detektorokkal, míg a 2016-os esetében három detektort tartalmaz a rendszer, nevezetesen a LHO-t, a LLO-t és a Virgo-t. Az \times a beinjektált jel tényleges irányát jelöli. Érdemes még megfigyelni az ilyen égtérképek egyik jellegzetes tulajdonságát, miszerint a tényleges irányával ellentétes irányban is igen nagy a valószínűsége. Ez annak köszönhető, hogy a detektorok irányérzékenysége két átellenes irányra igen hasonló.

Tehát mindkét algoritmus égi pozíció rekonstrukciója alaposan tesztelve van és láthatóan más módszerekkel konzisztens eredményeket produkálnak (lásd 3. ábrán a mintafüggvényes módszerrel való összehasonlítást). Azonban az a terület amit a gravitációshullám-jelhez tartozó elektromágneses jelet kereső csillagászoknak át kell vizsgálniuk nagyon nagy (több száz négyzetfok) a



3. ábra: A jobb oldali ábrán a BayesWave algoritmus égi irány becslése látható, bal oldalon pedig összehasonlításképpen ugyanazon esemény mintafüggvényes keresőalgoritmus által készített égi irány becslése. A színskala az esemény égi irányához tartozó valószínűség-sűrűségének logaritmusát jelöli. Jól látható, hogy a BayesWave jól összhangban van a nála érthető okokból pontosabb mintafüggvényes algoritmus eredményeivel.[6]



4. ábra: LIB algoritmus által készített égtérképek két különböző beinjektált feketelyuk-kettős jelre. A 2015-ös jel esetén két detektoros rendszerről van szó LHO és LLO detektorokkal, míg a 2016-os esetében három detektort tartalmaz a rendszer, nevezetesen a LHO-t, a LLO-t és a Virgo-t. Az \times a beinjektált jel tényleges irányát jelöli. A színskala az égi irány valószínűség-sűrűségét jelöli. [12]

távcsövek jellemző látómezejéhez képest (jellemzően kisebb mint 1 fok). Ennek a problémának az egyik kiküszöbölése lehet galaxiskatalógusok használata, amik segítségével megtalálhatjuk az adott területen lévő galaxisokat és így elegendő csak azokat átnéznünk az elektromágneses jel után kutatva. A jelenlegi legnagyobb ilyen jellegű katalógus a GLADE [13], azaz Galaxy List for the Advanced Detector Era, ami több mint 2 millió galaxist tartalmaz.

Hivatkozások

- [1] Dieter Wickmann. *Bayes-statisztika*. ELTE Eötvös Kiadó Kft., 1999.
- [2] M. Maggiore. *Gravitational waves*. Oxford University Press, 2008.
- [3] G. Angler. A teljesítmény spektrum és becslési módszerei, 2011. Gravitációshullám-asztrofizika házi dolgozat.
- [4] B. Boldizsár. A jel-zaj arány, 2015. Gravitációshullám-asztrofizika házi dolgozat.
- [5] S. Klimenko, I. Yakushin, A. Mercer, and G. Mitselmakher. A coherent method for detection of gravitational wave bursts. *Classical and Quantum Gravity*, 25(11):114029, June 2008.
- [6] N. J. Cornish and T. B. Littenberg. BayesWave: Bayesian Inference for Gravitational Wave Bursts and Instrument Glitches. *ArXiv*, October 2014.
- [7] Cornish N. and Littenberg T. Bayeswave review readiness presentation, 2014. DCC:G1401157-v2.
- [8] A. Bernardino and J Santos–Victor. A real-time gabor primal sketch for visual attention, 2005.
- [9] K. Smith. Reversible-jump markov chain monte carlo multi-object tracking tutorial. Communication IDIAP-COM-06-07, IDIAP Research Institute, 2006.
- [10] S. Vitale, J. Clark, J. Powell, R. Essick, R. Lynch, Siong, and E. Katsavounidis. Lib review readiness előadás, 2014. DCC:G1401158-v1.
- [11] R. Lynch, S. Vitale, and E. Katsavounidis. Update on omicron/lib as a burst 2nd pipeline, lvc march meeting, 2015. DCC:G1500299-v3.
- [12] R. Essick, S. Vitale, E. Katsavounidis, G. Vedovato, and S. Klimenko. Localization of Short Duration Gravitational-wave Transients with the Early Advanced LIGO and Virgo Detectors. *ApJ*, 800:81, February 2015.
- [13] G. Dalya, Z Frei, G. Galgoczi, P. Raffai, and R. S. Souza. Galaxy list for the advanced detector era, 2015.