

## 22. tétel: Gravitációshullám-kitörések

Csukás Károly<sup>1, a</sup>

<sup>1</sup>*Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest*

### I. A GRAVITÁCIÓS HULLÁMOK FORRÁSAI

A gravitációs hullámokat a jelalak szerint négy nagyobb csoportba soroljuk [1]. Ezek a következők:

- **Bespirálózó kettősök (1. ábra):** egy neutroncsillag-neutroncsillag (NS-NS), neutroncsillag-feketelyuk (NS-BH) vagy feketelyuk-feketelyuk (BH-BH) kettős bespirálózik, összeolvad, majd a keletkezett objektum (tipikusan feketelyuk) gravitációs hullámok kibocsátása mellett eléri az egyensúlyi állapotát. A bespirálózás elején közel állandó frekvenciájú hullámokat észlelünk, aztán ez a frekvencia az amplitúdóval együtt gyorsuló ütemben növekedik, ahogy a kisugárzott energia hatására egyre közelebb kerülnek az égitestek. Az ütközésre nincs általános modellünk, tehát csak megbecsülni tudjuk, hogy ekkor milyen jelalakot várhatunk. Az összeolvadás után egy csökkenő frekvenciájú és amplitúdójú jelet várunk. A bespirálózó fázist a jól modellezhető hullámforma miatt nagy pontossággal lehet keresni a detektorok adataiban.
- **Periodikus jelek:** a forrás kinetikus energiája nagyon lassan csökken a gravitációs hullámok kibocsátása következtében, ezért állandó frekvenciával tud sugározni hosszú időn keresztül. Forrása lehet például egy nem forgásszimmetrikus neutroncsillag.
- **Kitörések (2. ábra):** olyan esemény, amire nincs modellünk, vagy csak részlegesen modellezett. Az ilyen jeleket két csoportra szokás osztani az időtartamuk szerint. A rövid gravitációshullám-tranziensek 1 s-nél rövidebbek, míg a hosszú gravitációshullám-tranziensek hossza másodpercektől hetekig is tarthat [2]. A dolgozatban bemutatott módszerek is elsősorban a rövid tranziensekre vonatkoznak. Tipikusan nagy energiájú ütközések és csillagösszeomlások adnak ilyen jelet. Az ilyen események által keltett gravitációs hullámok jeleit általában frekvencia-idő térben keressük.  
Egy példa az ilyen típusú jelek forrására a II. típusú szupernóva-robbanás. Egy ilyen esemény során nagyjából naptömegnyi anyag gyorsul a fénysebesség negyedére. Ha a folyamat nem tengelyszimmetrikus, akkor minden esélyünk megvan rá, hogy észlelhető gravitációs hullám keletkezzen. A keletkező hullám hullámformája azonban erősen függ a csillag típusától és a kezdeti feltételektől (például a differenciális rotációjától) [3].
- **Sztochasztikus háttér:** a sztochasztikus háttér kétféle forrásból származik. Az egyik az ősrobbanásból visszamaradt gravitációs hullámok. A modellek alapján ennek az érzékelését nem várjuk földi detektoroktól. A másik forrás olyan pontforrások (pl. bespirálózó kettősök) halmaza, amiket nem tudunk egyedi eseményekként megkülönböztetni egymástól. Ez megjelenik a földi detektorok adatsoraiban.

Ezt a négy forrástípust szemlélteti a frekvencia-idő síkon a 3. ábra.

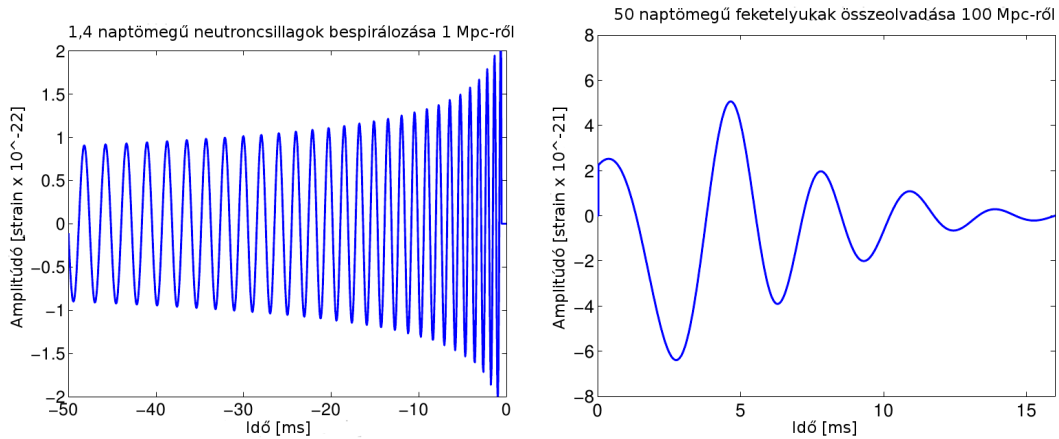
### II. A KITÖRÉS TÍPUSÚ JELEK PARAMETRIZÁLÁSA

Ahhoz, hogy az adatsorban kereshessünk egy adott hullámformát, ki kell jelölnünk a hullámformát leíró többparaméteres függvényteret. Ha a vizsgált adatszszakaszban azt találjuk, hogy az adatsor valamilyen értelemben eleme ennek a függvényternek, akkor gravitációs hullámot találtunk. A matched filtering technikánál [7], ahol a függvény alakját ismerjük, magától értetődő, hogy az adott alakú függvények terén keressünk, azonban ismeretlen hullámformák esetén is szükséges kijelölnünk bizonyos paramétereket [3].

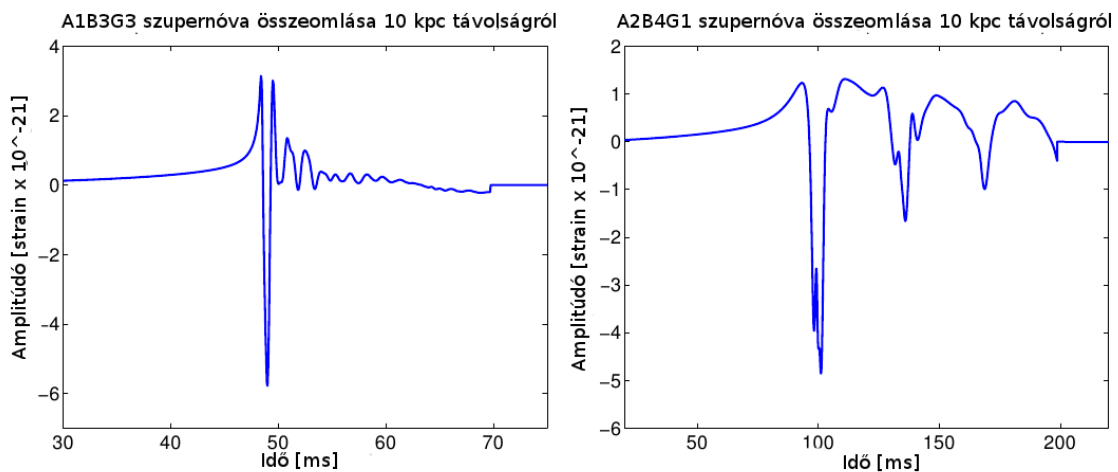
Az első lépés egy karakterisztikus amplitúdó meghatározása. Ennek segítségével normálhatjuk a jeleket. Az adatsort idő és frekvencia térben megadó függvény között egy Fourier-transzformáció teremt kapcsolatot. A transzformációnál a [3] konvencióit használjuk:

---

<sup>a</sup>Electronic address: [csukask@gmail.com](mailto:csukask@gmail.com)



1. ábra. Bespirálózó kettősök szimulált jelei. Bal oldalon 1,4 naptömegű neutroncsillag-kettős bespirálózása 1  $Mpc$  távolságról. Jobb oldalon két 50 naptömegű feketelyuk összeolvadása közben kibocsátott jel 100  $Mpc$  távolságról, ahogy Baker és társai [4, 5] szimulálták. A szimulált hullámforma az összeolvadás késői és a csillapodás korai fázisát mutatja. További részletekért lásd Chatterji [3].



2. ábra. Összeomló szupernóvák hullámformája, ahogy Dimmelmeier és társai [6] szimulálták. Ezek jó példák kitérés típusú jelekre. A két ábra különböző differenciális rotáció és forgási energia esetén szimulált folyamat eredményei.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(f) e^{2\pi i f t} df \quad (2.1)$$

$$\tilde{h}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-2\pi i f t} dt. \quad (2.2)$$

Mivel a két függvény normája Parseval tétele értelmében független attól, hogy idő vagy frekvencia térben integrálunk, így mindenféle bonyodalom nélkül definiálhatjuk a strain karakterisztikus amplitúdóját:

$$\|h\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{h}(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt. \quad (2.3)$$

Most már definiálhatjuk a normált  $\Psi(t)$  és  $\tilde{\Psi}(f)$  hullámokat.

$$h(t) = \|h\| \Psi(t) \quad (2.4)$$

$$\tilde{h}(f) = \|h\| \tilde{\Psi}(f) \quad (2.5)$$



3. ábra. A gravitációshullám jelek hozzávetőleges jelalakjai a frekvencia-idő síkon. A jól ismert bespirálozás során eleinte alig változik a hullám frekvenciája, aztán a sugárzás miatti energiaveszteség felgyorsítja a folyamatot és megnő a frekvencia. A periodikus jelek nagyon lassan veszítenek energiát, ezért állandó frekvenciájú jelet társítunk hozzájuk. A kitörésekről csak azt tudjuk, hogy rövid ideig tartanak és emiatt széles frekvenciasávban észlelhetjük őket. Végül a sztochasztikus háttér kitölti a síkot.

A 2.2 által definiált Fourier-spektrum értelmezési tartománya  $-\infty < f < \infty$ . Tudjuk, hogy a negatív frekvenciánál rögzített adatoknak nincs információtartalmuk, ugyanis ugyanaz az adatsor jelenik meg benne, mint a pozitív frekvenciáknál. Emiatt az így definiált spektrumot kétoldali Fourier-spektrumnak nevezzük. A gravitációs hullámok kutatásában az egyoldali spektrumot használják, ami a kétoldali spektrumból az alábbi módon kapható:

$$S(f) = \begin{cases} 2P(f) & f \geq 0 \\ 0 & f < 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

ahol  $S(f)$  az egyoldali spektrum,  $P(f)$  a kétoldali. A továbbiakban mindenhol az egyoldali spektrumot használjuk.

Az így normált hullámok négyzete olyan tulajdonságokkal rendelkezik, amiket elvárunk a valószínűsítésűsítéstől. Ezt kihasználva a következő mennyiségek definíciójánál a valószínűsítésszámításból vett analógiák segítségével illusztrálom a bevezetett mennyiségeket. Az idő- és frekvencia-térben számított várható érték egy számmal (idő és frekvencia értékkel) jellemzi a hullámot. Ezek a középponti idő és a középponti frekvencia. Erre mondhatjuk, hogy a hullám  $\tau$  időpontban jött be  $\Phi$  frekvenciával.

$$\tau = \int_{-\infty}^{\infty} t |\Psi(t)|^2 dt \quad (2.7)$$

$$\Phi = \int_0^{\infty} f |\tilde{\Psi}(f)|^2 df \quad (2.8)$$

Szintén a valószínűsítésszámításból vett analógiák alapján számolhatunk szórást. Az időben számolt szórás a jel időbeli kiterjedését, időtartamát jellemzi:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau)^2 |\Psi(t)|^2 dt, \quad (2.9)$$

míg a frekvenciában számolt szórás egyfajta sávszélességet határoz meg:

$$\sigma_f^2 = \int_0^{\infty} (f - \Phi)^2 |\tilde{\Psi}(f)|^2 df. \quad (2.10)$$

Be kell vezetnünk még egy paramétert. Ezt csak a frekvencia-térben értelmezzük: a jóság a középponti frekvencia és a sávszélesség hányadosa:

$$Q = \frac{\Phi}{\sigma_f}. \quad (2.11)$$

Ezzel az öt paraméterrel ( $||h||, \tau, \Phi, \sigma_t^2, \sigma_f^2$ ) jellemezzük egy általános gravitációshullám-kitörés által keltett jelet.

### III. ÉSZLELÉSI MÓDSZEREK

A módszerek csoportosításának egyik lehetséges alapja, hogy más csatornákon szerzett információinkat is beépíthetjük a keresésbe.

*Célzott és teljes égbolt keresések* Amikor valamilyen más forrásból (pl. gamma-kitörések) szerzett információk alapján valószínűsítjük, hogy egy időpontban meghatározott égi koordináták irányából gravitációs hullám érkezett, az információt felhasználjuk a keresés során, célzott keresést végzünk [8], ezzel jelentősen csökkentve a számításigényt. Ezzel szemben ha az a célunk, hogy más hordozóknál előbb, vagy azoktól függetlenül találjuk meg a jelet, akkor teljes égbolt (all-sky) [9] keresésre van szükség. Több detektor adatsorainak koherens összegzése előtt a hullám forrásának irányától függően időeltolást kell végeznünk, hogy kompenzáljuk a hullámok eltérő időben való érkezését. Ha a hullám bárhol érkezik, akkor több detektor adatsorainak korrelált felhasználása jelentősen növeli a számításigényt.

A jelalak keresésének módszere tekintetében néhány további fogalomról kell még szót ejtenünk.

*Koherens és inkoherens módszerek* A koherens módszerek több detektor adatsorában korreláltan keresik a jeleket, míg az inkoherens módszerek csupán egy detektor adatsorában keresnek jelet, majd kiszűrik azokat, amik más detektorok adatsorában nem szerepelnek. A koherens módszerek nagy előnye, hogy független adatsorok közti korrelációval kiszűrheti a korrelálatlan (pl. szeizmikus) zajokat, ennél fogva érzékenyebb az inkoherens módszereknél. A detektorok közti adatmozgatás és a több adat feldolgozása azonban jelentősen megnöveli a számítási időt, ezért koherens módszereket többnyire offline célzott keresésekre használnak. Ha nem ismerjük a forrás pozícióját, akkor a különböző detektorok adatsorait különböző késésekkel (mivel a távol lévő detektorokat nem egyszerre éri el a hullám) is vizsgálni kell (ami tovább növeli az amúgy is számításigényes módszer igényét) [8, 10].

Az inkoherens módszereknél nagyobb zajban kell megtalálni a jelet, ugyanis a koherens módszerek automatikusan kiszűrik az inkoherens zajokat. Mivel csak egy adatsort kell vizsgálni, jelentősen gyorsabb, mint a koherens módszerek, és online is használható. Több, független detektor adatsorán alkalmazva inkoherens módszert összevethetjük a detektorok eredményeit (hogy mikor érkezett gravitációshullám) és az időkésekből meghatározhatjuk a forrás pozícióját (ehhez legalább három detektor szükséges), így teljes égbolt keresésekre használható [3]. A két megközelítés előnyeiről és hátrányairól egy vázlatos összefoglalást nyújt az I. táblázat.

koherens	inkoherens
inkoherens zajok kiszűrése miatt érzékenyebb	nagyobb zajban keres, tehát kevésbé érzékeny
több adat korreláltatása miatt számításigényesebb	egy adatsort gyorsabban kiértékel
inkább offline célzott keresések	inkább online teljes égbolt keresés

I. táblázat. A koherens és inkoherens keresési módszerek főbb előnyeinek és hátrányainak összefoglalása.

*Matched filtering* [7] Amikor jól ismerjük a jelalakat az optimális bázis triviálisan adódik. Először lenormáljuk a spektrumot a detektor zajspektrumának inverzével. A tisztított adatsort ezután levetítjük a bázisra. Ezzel a módszerrel ismert hullámformákat nagy pontossággal lehet keresni. A módszer egy adatsorra alkalmazható, inkoherens.

*Absztrakt bázisok* Amikor nem ismerjük a keresett jelalakat, ki kell választanunk valami kényelmes bázist, ami lefedi a frekvencia-idő teret. Ezek a bázisok olyan értelemben absztraktak a matched filteringnél használthoz képest, hogy nincs mögöttük fizikai modell. Néha ezek a bázisok nem ortogonálisak, hanem átfednek, így egy jel több bázisra vetítve is megjelenik. Sokféle bázist ismerünk, amiket két csoportba sorolhatunk: idő-domén keresésnél általában az időben lokalizált függvényeket használunk, idő-frekvencia keresésnél a bázis ablakolt komplex exponenciális (szinusz és koszosz hullámok) vagy valami wavelet. Ezek könnyen kiterjeszthetőek több detektorra, így koherens és inkoherens algoritmusok is alkalmazzák.

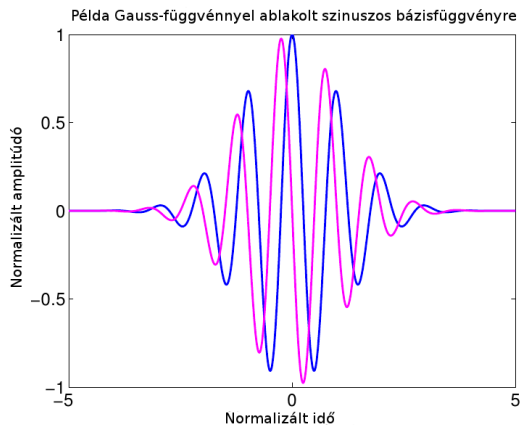
A Gauss-függvénnyel ablakolt szinuszos bázisfüggvények előnye, hogy ezzel érhető el a legjobb idő-frekvencia térbeli felbontás [3]. Ezek kis  $Q$ -ra ( $Q < 3$ ) nem alkalmazhatók, mivel a 3.1. bázis definíciója kétoldali, míg a 2.8. egyenletben és 2.10. egyenletben egyoldali. A két reprezentáció közti eltérések nehezen kezelhető problémát okoznak kis  $Q$ -n. A kis  $Q$  azt jelenti, hogy a jel  $\Phi$  frekvenciája kicsi (2.11). Kis frekvenciákon a földi detektoroknál nagy a szeizmikus zaj,

ami ellehetetleníti a keresést, ezért ez nem is akkora baj. A bázisok:

$$\Psi(t, \tau, \Phi, Q) = \left(\frac{8\pi\Phi^2}{Q^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{4\pi^2\Phi^2}{Q^2}(t - \tau)^2\right) \exp(-i2\pi\Phi(t - \tau)) \quad (3.1)$$

$$\tilde{\Psi}(f, \tau, \Phi, Q) = \left(\frac{Q^2}{2\pi\Phi^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{Q^2}{4\Phi^2}(f - \Phi)^2\right) \exp(-i2\pi\tau(f - \Phi)), \quad (3.2)$$

ahol a  $\tau, \Phi, Q$  mennyiségek a korábban 2.7., 2.8. és 2.11. egyenletekkel bevezetett mennyiségek. Ilyen bázisfüggvényből látunk példát a 4. ábrán.



4. ábra. Példa időtérbeli szinuszos Gauss bázisra 1 Hz középponti frekvenciával  $Q = 10$  jósággal. A páros és páratlan függvény a komplex bázis valós és képzetes része.

Ezek a szempontok mind közrejátszanak egy kereső algoritmus felépítésénél.

#### IV. KERESÉSI ALGORITMUSOK

A gravitációs hullámok keresési módszereik alapján többféle módon is csoportosíthatóak. Az első nagyobb különbség a kitörés típusú jelek időtartama alapján történő osztályozás. A hosszabb tranziensek ( $> 1 h$ ) keresésekor figyelembe kell venni a Föld forgását, keringését az antennafaktorok változásával és a Föld forgása és keringése miatt a jelre rakódó modulációkat is. A hosszabb jelek keresésére a STAMP módszert használják [1]. A jelen dolgozatban ezzel szemben a rövid ( $< 1 s$ ) gravitációshullám-kitörésekkel fogunk foglalkozni. Ezzel a határral még több detektálható folyamat is van, ugyanakkor a jelek terét eléggé megszorítottuk, hogy hatékonyan kereshessünk. Ebben az esetben a keresési stratégiát az határozza meg, hogy egy ismert pozíciójú forrás jeleit keressük, vagy az egész égboltról várunk jeleket. Ismert pozícióból származó jel keresésére az  $X$ -pipeline algoritmus terjedt el [10], ami a pozíció ismeretében lehetővé teszi, hogy több detektor jelét fázishelyesen összehasonlítsuk és így kiemelkedjen a jel. Ha jelünk a egész égboltról bárhonnan származhat, az  $\Omega$ -pipeline algoritmust használhatjuk [3]. Ekkor a detektorok jeleiben külön-külön keresünk és csak az így kapott riasztásokat vetjük össze. Ha legalább három detektor is nagyjából egy időben hasonló hullámformát detektál, akkor az egymáshoz képesti késésekből meghatározható a forrás helye. Létezik még egy frekvencia-idő térben működő koherens eljárás, a coherent waveburst [11]. Az alapelvek ismertetésére az  $x$ -pipeline és  $\Omega$ -pipeline elegendő, a coherent waveburst részleteit nem tárgyaljuk.

A bemutatandó módszerek közül az  $X$ -pipeline egy célzott keresésre kihegyezett koherens algoritmus. A LIGO és Virgo adatgyűjtési időszakai alatt gyűjtött adatsorokban az ezidő alatt katalogizált gamma-kitörések gravitációshullám-jeleit offline keresték [8]. Az  $\Omega$ -pipeline ezzel szemben inkoherens, teljes égbolt kereső algoritmus, ami online keresi a beérkező gravitációs hullámok jeleit [12].

## V. X-PIPELINE

Az  $X$ -pipeline-t nem modellezett gravitációshullámok keresésére tervezték detektorrendszerek adatsoraiban olyan módon, hogy robosztus legyen a glitch-ekkel szemben, amik olyan nem normális eloszlású zajok, amiket tévesen gravitációs hullámoknak tekinthetnénk. A kitörések jeleit nem ismerjük, de az az elvárásunk, hogy néhány millimásodperc és néhány másodperc közötti időtartamúak és az energiát a  $100 - 1000 \text{ Hz}$  tartományon adják le. Pontos modell nélkül nem tudunk hullámformát illeszteni, de előnyt kovácsolunk abból, hogy több detektorunk is van: ugyanazt a hullámformát keressük az összes detektor adatsorában. Az  $X$ -pipeline-ról jó összefoglaló a [10]

Az  $\alpha$ -adik adatsor jele  $d_\alpha$  lesz. A fejezet hátra lévő részében az áttekinthetőség kedvéért nem mindig írjuk ki ezt az indexet, ahol egyértelműen látszik, hogy szerepelnie kell. Úgy tekintjük, hogy ezek az adatsorok már ki vannak fehérítve (az adatsorokban lévő zaj csak fehérzaj) és a megfelelő idő eltolást is alkalmaztuk, hogy a máshol lévő detektorokba eltérő időben érkező jelek az adatsor ugyanazon részén jelenjenek meg. Ezt az eltolást könnyen megtehetjük, ha ismerjük a hullám forrásának égi koordinátáit.

Az adatsorunk Fourier-transzformáltja

$$\tilde{d}_\alpha(f) = \int_{-\infty}^{\infty} d_\alpha(t) e^{-i2\pi ft} dt. \quad (5.1)$$

Bevezetjük a zajspektrummal súlyozott mennyiségeket minden  $\alpha$  detektorra:

$$\tilde{d}_{w\alpha} = \frac{\tilde{d}_\alpha}{\sqrt{S}} \quad (5.2)$$

$$\tilde{n}_{w\alpha} = \frac{\tilde{n}_\alpha}{\sqrt{S}} \quad (5.3)$$

$$F_{w\alpha}^{+,\times} = \frac{F_\alpha^{+,\times}}{\sqrt{S}}, \quad (5.4)$$

ahol  $\tilde{n}$  a fehérzaj Fourier-transzformáltja,  $F^{+,\times}$  az antenna faktor,  $S$  az adott detektor zajspektruma. A továbbiakban mindenhol ezekkel a súlyozott mennyiségekkel számolunk, ezért a  $w$  indexeket elhagyjuk. Ezek vektorok és mátrixok a detektorok terén. A detektorok jeleinek összetételét felírhatjuk mátrixos alakban:

$$\tilde{d}_\alpha = \sum_{A=+,\times} F_\alpha^A \tilde{h}^A + \tilde{n}_\alpha, \quad (5.5)$$

ahol  $A$  a polarizáció, ami  $+$  és  $\times$  értékeket veheti fel.

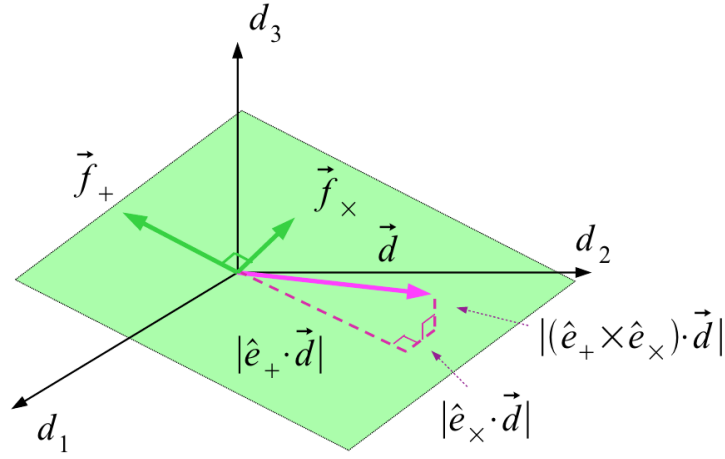
A következő vizsgálatban a statisztikában használatos likelihood függvényt, vagy likelihoodot kell használnunk. Ez a függvény hasonló a valószínűséghez azzal az eltéréssel, hogy a valószínűség egy statisztikai modell rögzített paramérei mellett vizsgálja a kimenetelt, míg a likelihood rögzített kimenetel esetén vizsgálja a paraméterek lehetséges értékeit. Bővebb leírásért javaslom a wikipédiát [13]. Legyen  $P(\tilde{d}, \tilde{h})$  a valószínűsége annak, hogy adott idő-frekvencia pixelben a  $\tilde{h}$  hullámformájú gravitációshullám-jel mellett a  $\tilde{d}$  adatsort kapjuk! Hasonlóan legyen  $P(\tilde{d}, 0)$  a valószínűsége annak, hogy nincs hullám, mégis a  $\tilde{d}$  jelet kapjuk! Ezekkel a likelihoodot

$$L = \log \frac{P(\tilde{d}, \tilde{h})}{P(\tilde{d}, 0)} \quad (5.6)$$

módon definiálhatjuk. Mivel nem tudjuk a hullámformát, ezért  $L$ -t maximalizáljuk a  $\tilde{h}$ -k terén. Ez a maximalizált likelihood a standard likelihood:

$$E_{SL} = \sum_{A,\alpha} \tilde{d}^* F F_{MP}^{-1} \tilde{d}, \quad (5.7)$$

ahol  $F_{MP}^{-1}$  a Moore-Penrose inverz:  $F_{MP}^{-1} = (F^* F)^{-1} F^*$ . Az  $F F_{MP}^{-1}$  az  $F^+$  és  $F^\times$  által kifeszített térbe vetítő operátor, ahol a gravitációs hullámok jelei is találhatóak. Ezzel  $E_{SL}$  a jel energiája. Ezzel szemben definiálhatunk egy  $E_{tot} = \sum |\tilde{d}|^2$  teljes energiát is. A teljesből levonva a jelek energiáját a zaj energiáját kapjuk:  $E_{null} = E_{tot} - E_{SL}$ . Az  $F^+$  és  $F^\times$  alapján bevezethetjük a domináns polarizációs keretet (DPF)[10], ugyanis az antennafaktorok függenek



5. ábra. A detektor straineik által kifeszített tér 3 detektor esetén. A zöld sík az  $e^+$  és  $e^\times$  antennavektorok által kifeszített sík. A magenta az adatsor egy egy megvalósulása. A szaggatott vonalak az adatsor levetítése a  $FF_{MP}^{-1}$  operátorral a hullám síkjára és az  $I - FF_{MP}^{-1}$  operátorral az arra merőleges irányba.

egy  $\Psi$  polarizációs szögtől, amit szabadon választhatunk meg. A DPF esetén olyan a polarizációs szög, hogy  $F^+$  maximális legyen. Az ebben értelmezett antenna faktorokat kis betűvel jelölöm. Ezekre igaz, hogy

$$|f^+|^2 \geq |f^\times|^2 \quad (5.8)$$

$$f^+ f^\times = 0. \quad (5.9)$$

A DPF bázisvektorai  $e^+ = f^+ / |f^+|$  és  $e^\times = f^\times / |f^\times|$  (5. ábra). Az  $f^+$  és  $f^\times$ -re merőleges térben semmilyen megszorítást nem ad ez a választás. A standard likelihood ezekkel kifejezve

$$E_{SL} = \sum_k (|e^+ \tilde{d}(k)|^2 + |e^\times \tilde{d}(k)|^2), \quad (5.10)$$

ahol  $k$  egy adott detektor adatsorában értelmezett index. Hasonlóan definiálhatjuk az adott polarizációjú jelek energiáit:

$$E_+ = \sum_k |e^+ \tilde{d}(k)|^2 \quad (5.11)$$

$$E_\times = \sum_k |e^\times \tilde{d}(k)|^2. \quad (5.12)$$

Léteznek további likelihoodok is, de ezekkel itt nem foglalkozunk. A fentiek azzal a feltevéssel lettek bevezetve, hogy a detektor zajának amplitúdója normális eloszlást követ. Valójában a zaj nem ilyen, sőt glitch-ek is előfordulnak. Ezek kiszűrésére újabb mennyiségeket kell bevezetnünk. A fenti energiák a detektorok közti koherenciát fejezik ki. A glitch kiszűrésére ezzel szemben az inkoherenca mértékét kell megragadni. Erre valók az inkohereus energiák:

$$I_+ = \sum_{\alpha, k} |e_{+, \alpha} \tilde{d}_\alpha(k)|^2 \quad (5.13)$$

$$I_\times = \sum_{\alpha, k} |e_{\times, \alpha} \tilde{d}_\alpha(k)|^2 \quad (5.14)$$

$$I_{SL} = I_+ + I_\times \quad (5.15)$$

$$I_{null} = \sum_{\alpha, k} (I - FF_{MP}^{-1})_{\alpha\alpha} |\tilde{d}_\alpha(k)|^2. \quad (5.16)$$

A glitch-ek nem korreláltak a detektorokban, így ha glitch-et találtunk és az így számolt  $E_{SL}$ -t (ami kicsi, hiszen ez a detektorok közt korreláltan fellépő jel) levonjuk az  $E_{tot}$ -ból, az szinte nem is változik. Így glitch esetén  $E_{null} \approx I_{null}$ .

Hullám jelenlétében azt várjuk, hogy  $I_{null}/E_{null} > C$ , ahol  $C > 1$ , ugyanis a korrelált jelek kiesnek az  $E_{null}$ -ból, míg az inkoherens statisztikában benne maradnak. Erős jelre  $E_{SL} > I_{SL}$  és a polarizációtól függően

$$E_+ > I_+ \quad (5.17)$$

és

$$E_\times < I_\times, \quad (5.18)$$

ha a hullám  $h_+$  polarizációjú, vagy

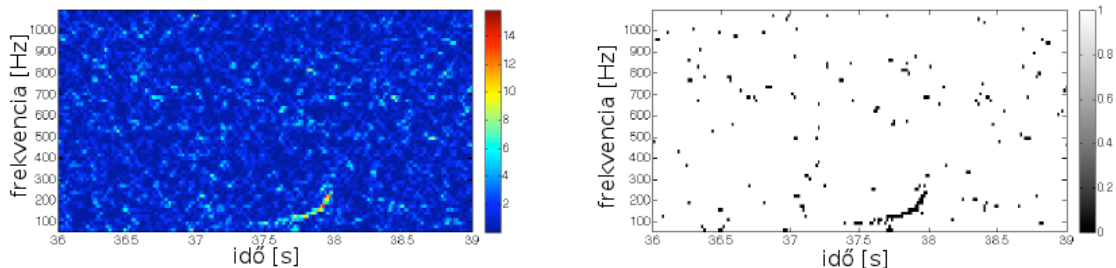
$$E_+ < I_+ \quad (5.19)$$

és

$$E_\times > I_\times, \quad (5.20)$$

ha a hullám  $h_\times$  polarizációjú.

Az  $X$ -pipeline tehát a következő folyamaton keresztül keresi a jeleket: megadunk neki egy detektorhalmazt, a vizsgálandó intervallumokat, a számolandó koherens energiákat, a források lehetséges pozícióit és még néhány paramétert. A program először kifehéríti a zajt és a detektor helyétől függően eltolja az adatsorokat. Minden detektorra előállítja a  $d$  frekvencia-idő adatsort és koherens módon összegzi őket. Ezzel előállt a koherens energiáknak egy idő- és frekvencia-térbeli függvénye. Erre alkalmazunk egy vágást, hogy csak a lehangosabb, legnagyobb koherens energiával rendelkező jelek maradjanak meg. A vágás után megmaradt pixelek lesznek a fekete pixelek. A szomszédos fekete pixeleket egy csoportba soroljuk. Ezek a csoportok esélyesek arra, hogy riasztást adjanak, hogy gravitációshullámot észleltünk. A 6. ábrán egy bespirálózó jelet és a hozzá tartozó fekete pixeleket láthatjuk. Kiválasztjuk a lehangosabb csoportot, ugyanis az a legvalószínűbb, hogy az lesz a hullám. Az eseményt elmentjük és elvégezzük az elemzést több különböző paraméterrel.



6. ábra. A zajban elültetett bespirálózó jele látszik a bal oldalon. Miután meghúzzuk a vágás határát megmarad a jel, de a zajból is marad (jobb oldal). Az így maradt zajt szűrjük ki azzal, hogy csoportokat keresünk.

## VI. $\Omega$ -PIPELINE

Az  $\Omega$ -pipeline inkoherens teljes égbolt keresési algoritmus, ami elég gyors ahhoz, hogy online keressen a detektorok jeleiben. A módszer részleteiről a [3] ad tájékoztatást, az alábbiakban következik egy összefoglalása.

Az  $\Omega$ -pipeline neve eredetileg  $Q$ -pipeline volt, az eljárás alapját képező  $Q$ -transzformáció után. A  $Q$  arra utal, hogy az idő-frekvencia síkot azonos jóságú pixelekkal fedjük le, ugyanis az ablakunk szélessége a frekvenciával fordítottan arányos. Ilyen szempontból az eljárás hasonló a wavelet transzformációhoz, azt leszámítva, hogy itt nem célunk a jelek helyreállítása. Ennek következtében túlteljes bázisokat használhatunk, a bázisfüggvényeink nem ortogonálisak. A választásunk előnye, hogy biztosabban észlelhetjük a jelet, ugyanis több bázisra levetítve is megjelenik, de pont emiatt nem tudjuk rekonstruálni a hullámformát.

A folytonos transzformáció közvetlen formájában egy egyszerű vetítés a bázisfüggvényekre:



$$X(\tau, \Phi, Q) = \int_{-\infty}^{\infty} d(t)w(t - \tau, \Phi, Q)e^{-i2\pi\Phi t} dt, \quad (6.1)$$

ahol  $w(t - \tau, \Phi, Q)$  a bázis függvény. A kapott komplex szám a jel amplitúdójáról és fázisáról tartalmaz információt. Ennek a transzformációnak egy alternatív értelmezését kapjuk a

$$v(t, \Phi) = d(t)e^{-i2\pi\Phi t} \quad (6.2)$$

függvény bevezetésével. A transzformáció ekkor

$$X(\tau, \Phi, Q) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t, \Phi)w(t - \tau, \Phi, Q)dt \quad (6.3)$$

formát ölti. A következő Fourier-transzformáltakkal a  $Q$ -transzformáció a frekvencia-térben szorzat alakját veszi fel:

$$\tilde{v}(f, \Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t, \Phi)e^{-i2\pi ft} dt \quad (6.4)$$

$$\tilde{w}(f, \Phi, Q) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t, \Phi, Q)e^{-i2\pi ft} dt \quad (6.5)$$

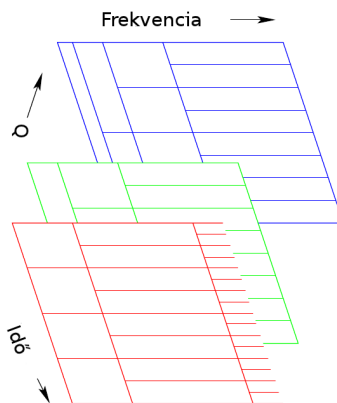
$$\tilde{X}(f, \Phi, Q) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau, \Phi, Q)e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (6.6)$$

$$\tilde{X}(f, \Phi, Q) = \tilde{v}(f, \Phi)\tilde{w}^*(f, \Phi, Q). \quad (6.7)$$

Az adatsor és a (6.2) által definiált függvény között érvényes a  $\tilde{v}(f, \Phi) = \tilde{d}(f + \Phi)$ , ahol az adatsor Fourier-transzformáltját használtuk. A végső képlet egy inverz Fourier-transzformáció alakját ölti:

$$X(\tau, \Phi, Q) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{d}(f + \Phi)\tilde{w}^*(f, \Phi, Q)e^{i2\pi f\tau} df. \quad (6.8)$$

A 6.8. egyenlet alapján a transzformáció során egyszer kell Fourier-transzformálni az adatsort, aztán a visszatranszformálást már csak a minket érdeklő frekvencia-tartományon kell elvégeznünk. Az  $\Omega$ -pipeline ilyen módon egy 7. ábrán szemléltetett térben működik.



7. ábra. A  $Q$ -transzformáció úgy transzformálja a jelet  $(f, t)$  térbe, hogy a jóság állandó maradjon. Ezt a transzformációt több  $Q$  mellett elvégezhetjük, így  $(f, t, Q)$  tér egy csempézését kapjuk, ahogy a [3]-ban láthatjuk. Az ábrán a frekvenciatengely mentén logaritmikus skálázást alkalmazunk.

Mivel véges és diszkrét adatsorokat szeretnénk transzformálni, ezért be kell vezetnünk a diszkrét  $Q$ -transzformációt. Ehhez a szokásos diszkrétizálással járó problémákat kell megoldani, különös tekintettel arra, hogy ilyenkor az adatsort végtelenszer ismétlődő  $N$ -eseknek tekintjük. A (6.8) diszkrét változata egyszer használja a gyors Fourier-transzformációt (FFT) és aztán már csak az ablakfüggvénnyel csökkentett adatsort kell visszatranszformálni. Egy

jól megválasztott véges méretű ablakkal a számítási igény  $N \log N$ -el skálázódik, ami meglehetősen jó, ezért gyors diszkrét  $Q$ -transzformációnak is nevezik.

A korábbiakban volt szó a (3.1) Gauss-függvényes lecsengésű szinuszos bázisokról. A diszkretizálásnál problémát jelent ennek a bázisnak a végtelen kiterjedése. Ebből következik, hogy a diszkrét esetben nem tudunk olyan bázist választani, ami maximalizálja a felbontást a frekvencia-idő térben, de választhatunk olyan ablakot, ami nem nagyon rontja el a felbontást és könnyen számítható is. Szintén fontos szempont, hogy a jel energiája ne vesszen el, amikor elvégezzük a transzformációt. A választás a Connet ablakra esett, ami a

$$\tilde{w}(f) = \begin{cases} A(1 - (f/\Delta f)^2)^2 & |f| < \Delta f, \\ 0 & |f| \geq \Delta f \end{cases}$$

alakban adható meg, ahol  $\Delta f$  az ablak félértékszélessége,  $A$  egy normálási faktor. A 8. ábrán látható, hogy két ablakfüggvény közti eltérés a függvény közepén nem is látszik. Ennek a választásnak van néhány előnye:

- Frekvencia-térben nagyon egyszerű az alakja, ami jól jön a gyors diszkrét  $Q$ -transzformáció során.
- Az ablak mérete véges. Láttuk, hogy ez jelentősen gyorsítja az inverz FFT-t.
- A Connet ablak esetén kapott frekvencia-idő felbontás csak 4,5%-al rosszabb, mint az ideális, de kezelhetetlen Gaussolt szinusz. Megjegyezzük, hogy a  $\Delta f$  félértékszélesség és a sáv szélesség között fennáll a  $\Delta f = \Phi\sqrt{11}/Q$  összefüggés.

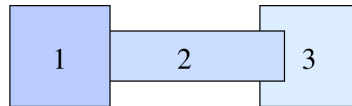


8. ábra. A késsel jelölt függvény Gauss-függvénnyel van ablakolva, míg a lila Connet-val. Láthatjuk a széleken, hogy a Connet-ablak gyorsabban levágja a hullámokat, így alkalmasabb diszkrét adatsor bázisának.

Statisztikai vizsgálatok alapján bevezethetjük a normált jelenergiát a

$$E = \frac{|X(\tau, \Phi, Q)|^2}{\langle |X(t, \Phi, Q)|^2 \rangle} \quad (6.9)$$

módon, az átlagolást egy reprezentatív mintán vesszük, amiben a frekvencia és a jóság azonos a gravitációshullám-jelöltével, de eltérő időben vesszük őket. Ez alapján rangsorolhatjuk a  $(\tau, \Phi, Q)$  cempéket, hogy mennyire erős bennük a jel, mekkora a jelenergia az adott pixelben. A módszer elsősorban lokalizált kitörésekre lett kitalálva, ezért szükség van még egy válogató algoritmusra. Ezek után meg kell határoznunk a legnagyobb jelenergiájú jelet és eldobni a kisebb energiájúakat. Egyrészt ezzel javítjuk a jel/zaj arányt és csökkentjük a hamis riasztást. Másrészt, ha csökkentjük a szóbjöheterő események számát, az gyorsítja a többi detektorral végzett koincidencia vizsgálatot is. A fázisterünket több  $Q$  síkkal fedjük le és ezeknek a síkoknak a pixeli átfednek. Az algoritmus a következő: vesszük csökkenő erősségű sorrendben a jelzéseket és ahol átfednek, ott a gyengébb jelet eldobjuk. Ezt a gondolatmenetet a 9. ábrával szemléltetjük.



9. ábra. A három pixel átfed jelenergia szerinti csökkenő sorrendbe rendezve. Ekkor először az 1-es és 2-es pixelek átfedését tekintjük, mert a legerősebbtől indulunk. Az 1-es fedi a 2-est, ezért a 2-est el kell vetnünk. A következő átfedés a 2-es és 3-as pixelé lenne, de a 2-est már elvetettük, így maradt a nem átfedő 1-es és 3-as pixel.

Az  $\Omega$ -pipeline tehát a következő műveleteket végzi el az adatsorral: először kifehériti a zajt, aztán elvégzi a  $Q$ -transzformációt. A  $Q$ -transzformáció után megállapít egy normalizált jelenergia értéket, ami alatt eldobja az eseményeket. A megtartott eseményeket még válogatni kell átfedés szempontjából. Ezek után ki kell gyűjteni az egyéni eseményeket és meg is vannak a jelöltjeink. Az eljárás egy koherens változata lehet, ha az átfedő csempék eltávolítása után keresünk koincidenciát a detektorok között és ezek után gyűjtjük ki az eseményeket.

## VII. A KERESŐ ALGORITMUSOK ALKALMAZÁSA

Az elmúlt években az interferometrikus detektorok által gyűjtött adatokban keresett gravitációshullám-kitörésekről több publikáció is született. Habár eddig nem sikerült megfigyelni ilyen jeleket, ez a negatív eredmény is alkalmas arra, hogy bizonyos paraméterekre (általában a források távolságára vagy események gyakoriságára) korlátokat állítsunk fel.

A LIGO ötödik adatgyűjtési időszakában és a Virgo első adatgyűjtési időszakában 2005. november 4-e és 2007. október 1-e közötti adatokban kerestek kitöréseket Abbott és társai [8]  $X$ -pipeline és cross-correlation pipeline használatával. Mindkét módszer koherens és célzott. A vizsgált időszakban 137 gammakitörést észleltek optikai tartományban és ezekre végeztek célzott keresést kitörésekre és bespirálózásokra is. Nem találtak az adatsorban gravitációs hullámokra utaló jeleket, de minden kitörésre egyenként megállapítottak egy távolsághatárt, aminél távolabb lehetnek a források (különben észleleték volna a gravitációshullámokat). Ezeknek a távolságoknak a mediánja  $12 Mpc(E/0,01M_{Nap}c^2)$   $150 Hz$ -es jelekre, ahol a detektorhálózat a legérzékenyebb.

A 2009-2010. közötti LIGO és Virgo adatgyűjtési időszak adataiban (LSR6, VSR2, VSR3) kerestek szintén kitörés és bespirálózás típusú jeleket Abadie és társai[14]  $X$ -pipeline és matched filtering módszerekkel. Az időszakban 154 gammakitörést észleltek. A medián határtávolság ezúttal  $17 Mpc(E/0,01M_{Nap}c^2)$   $150 Hz$ -es jelekre, ahol a detektorhálózat a legérzékenyebb.

A LIGO ötödik és Virgo első adatgyűjtési időszakában teljes égbolt keresést végeztek Abadie és társai [15] exponential gaussian correlator,  $\Omega$ -pipeline és coherent waveburst módszerekkel. A keresést  $50 - 6000 Hz$  frekvenciatartományon végezték. A detektált jelek hiányából arra következtettek, hogy  $64 - 2048 Hz$ -es gravitációshullámokból átlagosan évente 2 van, míg ennél nagyobb frekvenciájú ( $6 kHz$ -el bezárólag) 2,2 darab van.

A 2009-2010. közötti második LIGO és Virgo együttműködés során teljes égbolt keresést végeztek Abadie és társai [9] coherent waveburst módszerrel. Az előzőekhez képest az alacsony frekvenciájú ( $64 - 1600 Hz$ ) események gyakorisága 1,3 darab évente, míg a magasabb frekvenciájú eseményeké 1,4 darab.

- 
- [1] Raffai, P., Értekezés a Phd. cím elnyeréséért, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest (2012), URL [http://bolyai.elte.hu/~praffai/Phd\\_praffai.pdf](http://bolyai.elte.hu/~praffai/Phd_praffai.pdf).
- [2] Thrane, E., et al., Phys. Rev. **D83** (2011), arXiv:1012.2150.
- [3] Chatterji, S. K., Értekezés a Phd. cím elnyeréséért, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge (2005), URL [http://bolyai.elte.hu/~praffai/GH\\_Ora/Shourov\\_Thesis.zip](http://bolyai.elte.hu/~praffai/GH_Ora/Shourov_Thesis.zip).
- [4] Baker, J. G., Campanelli, M., Lousto, C. O. és Takahashi, R., Phys. Rev. **D65** (2002), astro-ph/0202469.
- [5] Baker, J. G., Campanelli, M., Lousto, C. O. és Takahashi, R., Phys. Rev. **D69** (2004), astro-ph/0305287.
- [6] Dimmelmeier, H., Font, J. A. és Müller, E., Astron. Astrophys. **393** (2002), astro-ph/0204289.
- [7] Owen, B. J., Sathyaprakash, B. S., Phys. Rev. **D60** (1999), gr-qc/9808076.
- [8] Abbott, B. P., et al., Astrophys. J. **715** (2010), ISSN 1438-1452, arXiv:0908.3824.
- [9] Abadie, J., et al., Phys. Rev. **D85** (2012), arXiv:1202.2788.

- [10] Sutton, P. J., et al., *X-Pipeline: A Coherent Analysis Package for Gravitational-Wave Burst Searches*, URL [http://www.researchgate.net/publication/254838184\\_X-Pipeline\\_A\\_Coherent\\_Analysis\\_Package\\_for\\_Gravitational-Wave\\_Burst\\_Searches](http://www.researchgate.net/publication/254838184_X-Pipeline_A_Coherent_Analysis_Package_for_Gravitational-Wave_Burst_Searches).
- [11] Klimenko, S., Yakushin, I., Mercer, A., Mitselmakher, G., *Class.Quant.Grav.* **25** (2008), gr-qc/08023232.
- [12] Abbott, B. P., et al., *Phys. Rev.* **D69** (2004), gr-qc/0308050.
- [13] URL [http://en.wikipedia.org/wiki/Likelihood\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Likelihood_function).
- [14] Abadie, J., et al., *Astrophys. J.* **760** (2012), arXiv:1205.2216.
- [15] Abadie, J., et al., *Phys. Rev.* **D81** (2010), arXiv:1002.1036.