

21. tétel: Bespiráló kettősök jelei II.

RÁCZ GÁBOR^{1, a}

¹Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

I. BEVEZETÉS

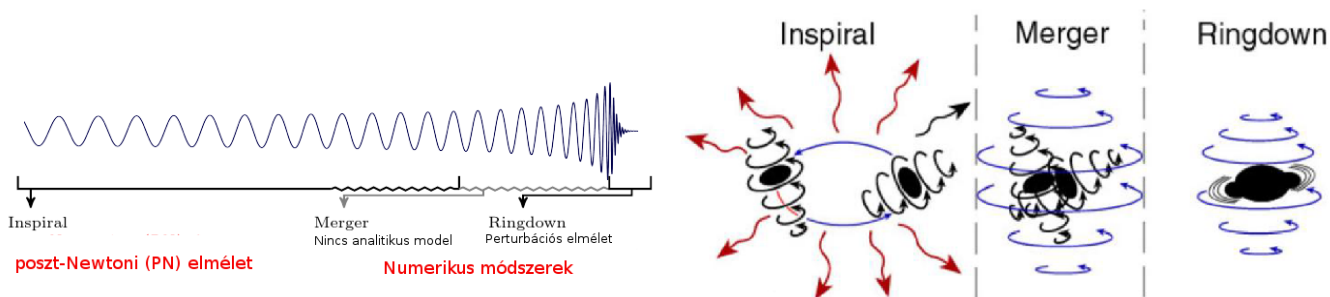
A kompakt bespiráló kettős rendszerek (KBK) gravitációs hullámok forrásai, és mivel elég közel tud a két test keringeni egymáshoz, a keltett hullám amplitudója elég nagy ahhoz, hogy a közeljövőben kimutathatóak legyenek az Advanced LIGO detektorral [1, 2]. A kimutatható lehetséges források a következők:

- Fekete lyuk – fekete lyuk (BH-BH) kettős
- Neutroncsillag – neutroncsillag (NS-NS) kettős
- Fekete lyuk – neutroncsillag (BH-NS) kettős

További előnyük a KBK forrásoknak, hogy a jelalak jól modellezhető a bespiráló és a ringdown fázisban. A jel frekvenciája $10 - 100\text{Hz}$ között várható. Jelöljük továbbiakban f_0 -al azt a frekvenciát ahol a jel a detektor legérzékenyebb tartományába beleér. Ezt önkényesen szokták megválasztani [3]. Ha a jel frekvenciája elérte az f_0 frekvenciát, az összeolvadás $\sim 34 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-5/3} \left(\frac{f_0}{40\text{Hz}}\right)^{-8/3}$ s múlva fog megtörténni [4], ahol $M = (m_1 \cdot m_2)^{3/5} / (m_1 + m_2)^{1/5}$ a chirp tömeg, m_1 és m_2 a rendszer komponenseinek a tömege. A mért jelből számíthatóak a rendszer fizikai paraméterei [2], az eseményrátákkal pedig ellenőrizhetőek a különböző asztrofizikai és kozmológiai modellek, például a kettős rendszerek gyakorisága és kialakulási rátája [4]. Mivel a KBK-k jelalakja és amplitudója ismert a rendszert leíró paraméterek függvényében, ezért használhatóak standard gyertyákként, így ez egy új módszert adhat a Hubble-állandó mérésére [2, 4].

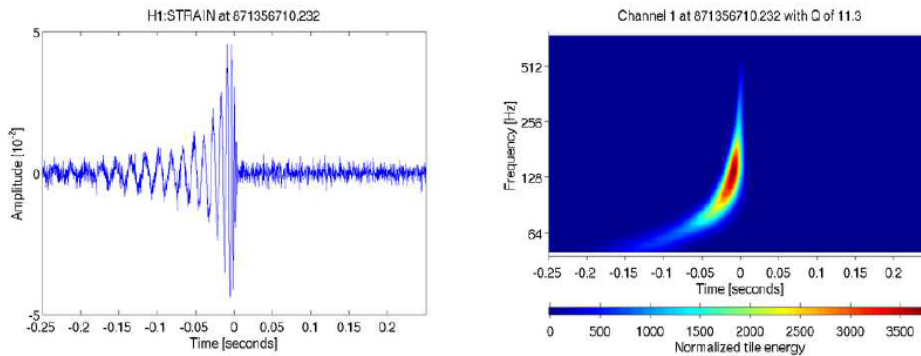
II. A BESPIRÁLOZÓ KETTŐSÖK KERESÉSÉNEK STRATÉGIÁI; MATCHED FILTERING

Egy bespiráló kettős jele a következő alakú [5]:



1. ábra. A bal oldalon látható a keltett gravitációs hullám domináns gömbi harmonikus (kvadrupól) módusa két bespiráló spinmentes fekete lyuk esetén [5]. A poszt-newtoni elméletben számolhatjuk a bespiráló szakaszt. Ennek hibája egyre nagyobb lesz, és egy bizonyos pont után már célszerű numerikus módszereket alkalmazni egészen az összeolvadási (merger) szakasz végéig [5]. Az merger szakasz akkor kezdődik, amikor a két vizsgált objektum összeér. A jobb oldalon a bespirálás fázisai láthatóak tetszőleges spin esetén. [4]

^ae-mail cím: ragraat@caesar.elte.hu



2. ábra. Bespirálózó BH-BH kettős ($m_1 = 14M_\odot$; $m_2 = 16M_\odot$) várt jele az összeolvadáskor szimulált LIGO/VIRGO zajjal. Jobb oldalon az idő-frekvencia térben látható ugyanaz a jel [6].

Mivel ismert a jelalak, ezért két keresési stratégia is választható:

- Célzott keresés: A forrás paraméterei ismertek [7]
- Vak keresés: A forrás paraméterei nem ismertek [2, 8]

Célzott keresést akkor tudunk végrehajtani, ha a bespirálózó kettős legalább egyik tagja NS. Ekkor lehetséges elektromágneses felvillanás, így a gravitációshullám-detektorokkal felvett jelekből utólag kikereshető az összeolvadás-kor keletkező gravitációs hullám [7]. A módszer hátránya, hogy kevés ilyen forrást lehet detektálni, viszont a jelkeresés könnyebb, mivel lehet tudni, hogy hol kell keresni a jelet az adatsorban.

Vak keresés esetén végig kell pásztázni a teljes paraméterteret, így a jelkeresés jóval számításigényesebb, viszont olyan forrásokat is detektálhatunk, amelyekhez nem tartozik elektromágneses sugárzás. Ilyenek az összeolvadó fekete lyukak.

A fejezet további részében adott paraméterekkel rendelkező forrás keresését végezzük el. A "matched filtering" módszert használják a bespirálózó kettősök keresésére. Ennek lényege, hogy a mért adatsort korreláltatják a keresett jellel. Legegyszerűbb esetben [9]:

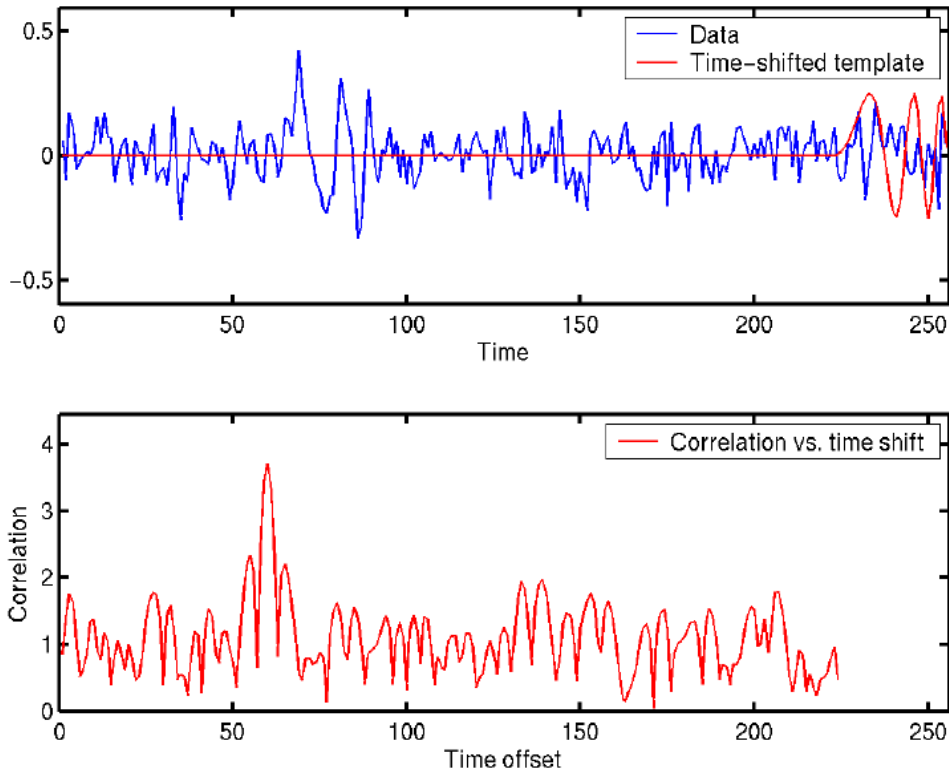
$$C = \langle s|h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt' s(t') \cdot h(t') \quad (2.1)$$

ahol $h(t')$ a minta függvény, $s(t')$ a mért adatsor. A jel keresés során C mennyiség abszolútértékének maximum helyeit keresik[9]. Gravitációs hullámok keresésénél lesz egy szabad paraméterünk: az időeltolás (t). Ezzel:

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' s(t') \cdot h(t' - t) \quad (2.2)$$

Célszerű áttérni Fourier-térre, mivel itt könnyebb lesz a későbbiekben a zajt figyelembe venni, továbbá itt az időeltolás is csak a $e^{2\pi i f t}$ fázisfaktorban jelenik meg, így lecsökkenthető a keresés futási ideje, mivel időtérben ki kellene számítani a korrelációs együttható értékét. Inverz Fourier-transzformációt alkalmazva:

$$C(t) = 4 \int_0^{\infty} df \tilde{s}(f) \cdot \tilde{h}^*(f) e^{2\pi i f t} \quad (2.3)$$



3. ábra. Adott adatsorra vizsgált korreláció az időeltolás függvényében [9]

$\tilde{h}(f)$ és $\tilde{s}(f)$ egyoldali Fourier-spektrumok. $\tilde{h}(f)$ komplex konjugáltja $\tilde{h}^*(f)$. Így, már a zajt is figyelembe véve [9]:

$$C(t) = 4 \int_0^{\infty} df \frac{\tilde{s}(f) \cdot \tilde{h}^*(f)}{S_n(f)} e^{2\pi i f t} \quad (2.4)$$

Ahol $\tilde{s}(f)$ és $\tilde{h}(f)$ a mért adatsor és a keresett jel Fourier-transzformáltja, $S_n(f)$ a detektorhoz tartozó érzékenységi görbe [10]. Akkor jelenthetjük ki, hogy detektáltunk gravitációs hullámot, ha $|C(t)|$ maximuma átlép egy előre megadott értéket. Tehát[9]:

$$\max |C(t)| > T_{threshold} \quad (2.5)$$

Természetesen a 2.4 Fourier-transzformációt analitikusan nem lehet elvégezni, mivel az adatsornak csak adott pontbeli értékeit ismerjük. Ezért diszkrét-Fourier transzformációt(DFT) [11, 12] kell alkalmazni.

III. A SZŰRŐK PARAMÉTERTERE ZÉRUS ÉS NEMZÉRUS SPINEK ESETÉN

A II fejezetben feltételeztük, hogy a jel alakját tökéletesen ismerjük, tehát hogy nincsenek benne szabad paraméterek az időeltoláson (t_c) kívül [4]. A jel kezdete az a t_0 időpillanat, ahol a jel frekvenciája eléri f_0 -t. A Φ_c az a fázis, amivel a jel rendezik a t_0 időpillanatban. A továbbiakban legyen a jel Φ_c fázisa is szabad paraméter. Ha egy ismert rendszernek a jeleit akarjuk detektálni, akkor valóban ez a helyzet. Viszont egy ismeretlen KBK esetén lesznek egyéb szabad paraméterek amik meghatározzák a rendszer által keltett gravitációs hullámokat. Két esetet különböztetünk meg:

- zérus spinű eset
- nemzérus spinű eset

Definiáljuk a belső szorzatot [4]:

$$\langle a|b \rangle = 4\Re \int_0^\infty \frac{\tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f)}{S_n(f)} df \quad (3.1)$$

Ezzel a jel-zaj arány, ha u a mintafüggvény és h a felvett adatsor:

$$SNR = \langle h|u \rangle = \max_{\Phi_c, t_c} \langle h|u \cdot e^{i(2\pi f t_c + \Phi_c)} \rangle \quad (3.2)$$

Legyen $\lambda = (\Phi_c, t_c, \theta)$, ahol θ a szabad paraméterek összessége. Legyen θ^i az i -edik szabad paraméter. Ha az adatsor tartalmaz egy $u(\theta_1)$ jelet, és $u(\theta_2)$ alakú jelet keresünk, akkor a két jel közötti hasonlóságot így számíthatjuk ki [4]:

$$M(\theta_1, \theta_2) = \max_{\Phi_c, t_c} \langle u(\theta_1)|u(\theta_2) e^{i(2\pi f t_c + \Phi_c)} \rangle \quad (3.3)$$

A két jel hasonlóságának ismeretében bevezethetjük a paramétertér metrikus tenzorát [4]:

$$g_{ik}(\theta) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 M(\theta, \Theta)}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \Big|_{\theta^k = \Theta^k} \quad (3.4)$$

Tehát $M(\theta, \Theta)$ két vektor változós skalár függvény második változói szerint kétszer parciálisan deriválunk, majd a kapott tenzor második változóját egyenlővé tesszük az első változóval ($\theta^k = \Theta^k$), és szorozzuk $-1/2$ -el.

Ha $1 - M \ll 1$, akkor M közelíthető:

$$M(\theta, \theta + \delta\theta) \sim 1 - g_{ij} \delta\theta^i \delta\theta^j \quad (3.5)$$

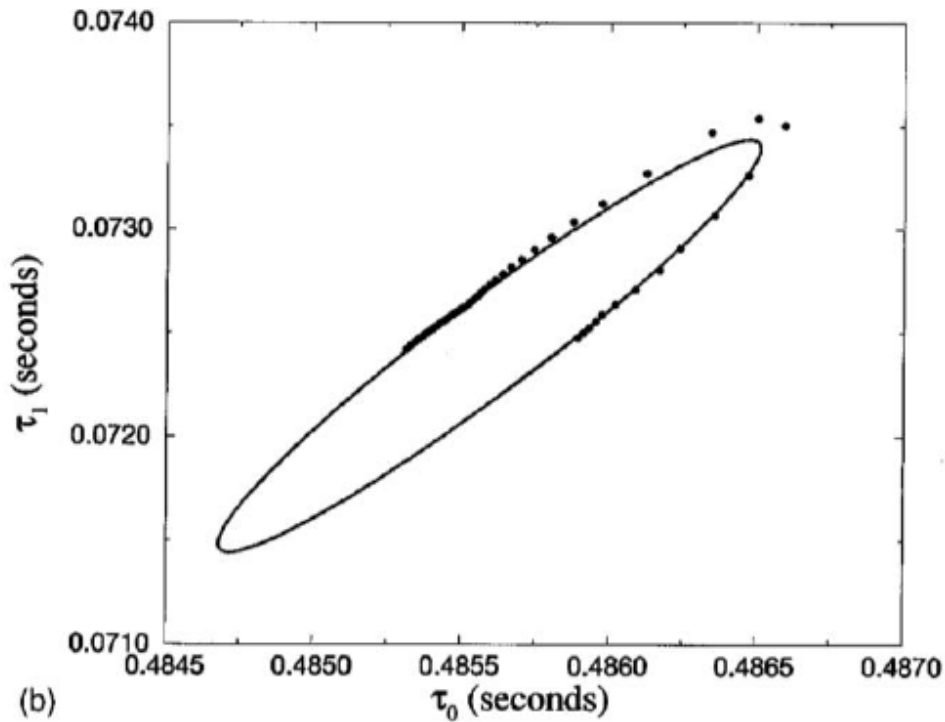
A. Zérus spin

Zérus spinről akkor beszélünk, ha a bespirálózó objektumok saját impulzusmomentuma zérus. Neutroncsillagok bespirálózásánál a jelalakban általában a spin csak kis járulékot ad, a megfigyelt pulzások – ezek olyan forgó neutroncsillagok, melyek erős mágneses térrel rendelkeznek és a mágneses tengely nem esik egybe a forgási tengellyel – periódusideje alapján [13], így kezelhető zérus spinű esetként egy ilyen rendszer. Bespirálózás során a rendszer excentricitása tart zérushoz a gravitációs sugárzás következtében, ezért mire a jel amplitúdója és frekvenciája eléri a detektáláshoz szükséges minimális értéket, a rendszerben a két test már körpályán fog mozogni [14]. Külső perturbációk következtében lehetséges nemzérus excentricitás is [14], viszont ezekkel a továbbiakban nem foglalkozunk. Zérus excentricitás esetén $h(t)$ -ben két szabad paraméter lesz az időeltoláson kívül: a két test nyugalmi tömege (m_1 és m_2). Célszerű átállni az alábbi paraméterekre [4]:

$$\tau_0 = \frac{5}{256} M_b^{-5/3} (\pi f_0)^{-8/3} \eta^{-1} \quad (3.6)$$

$$\tau_1 = \frac{5}{192} M_b^{-1} (\pi f_0)^{-2} \left(\frac{743}{336} \eta^{-1} + \frac{11}{4} \right) \quad (3.7)$$

ahol $\eta = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)^2$, $M_b = m_1 + m_2$ a rendszer teljes tömege. Belátható, hogy ezen a paramétertéren egy adott pont körül, a $\sim 0.95 = M(\theta_p, \theta_i) / M(\theta_p, \theta_p)$ egyezésű pontok egy ellipszist alkotnak, ahol θ_p a ponthoz tartozó paraméterek összessége. A τ_0 és τ_1 téren a metrikus tenzor komponensei állandók a poszt-newtoni elmélet első (1PN) rendjében, és csak kicsit változnak magasabb rendeknél [4].

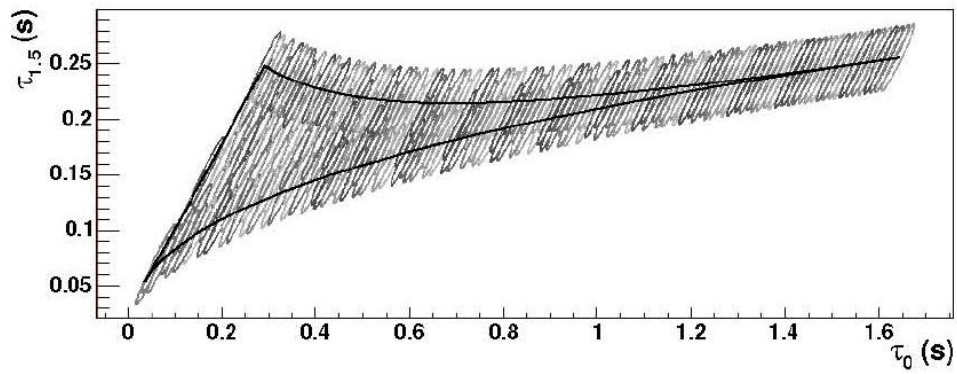


4. ábra. A paramétertérbeli ellipszis, zérus spin esetén [4]

A paramétertérben minden ponthoz tartozni fog egy ilyen ellipszis. Ez látható a 4. ábrán. Jel keresésénél a paramétertér minden pontján meg kell vizsgálni a (2.5) kritérium teljesülését arra az esetre, ha a C -t a paramétertérbeli ponthoz tartozó ellipszis közepének megfelelő h mintafüggvénnyel számoljuk ki. Ehhez elég az ellipszisekkel lefedni a paramétertérteret. A paramétertér lefedését a következőképpen kell megtenni:

- Összefüggő módon kell lefedni a teret \iff nincsenek lyukak a lefedésben
- Minél kisebb számú ellipszissel történjen a lefedés

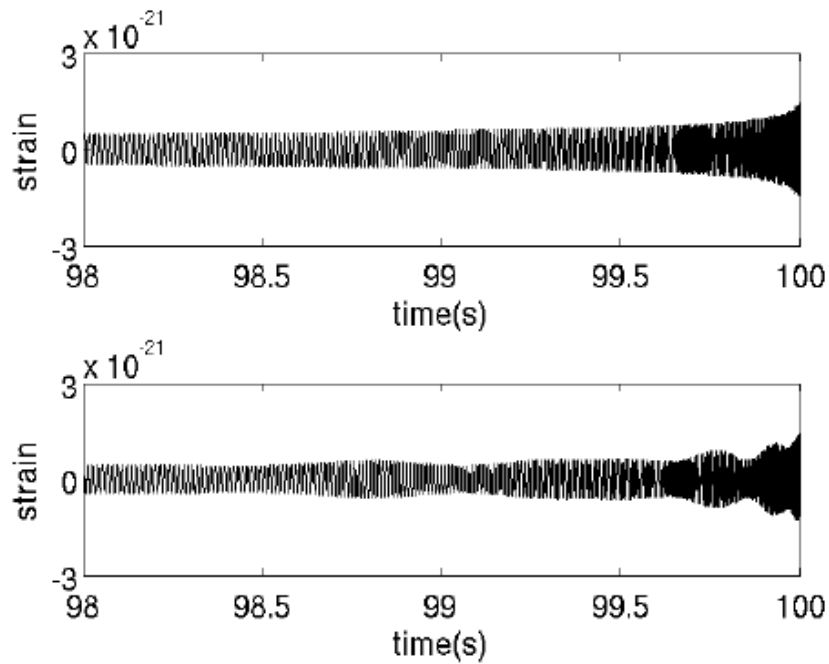
Az összefüggőség azért fontos, mert ha nem így fednék le a teret, a "lyukakban" lévő forrásokat nem tudnánk detektálni. Mivel a jelkeresés numerikusan történik, ezért célszerű minél kevesebb ellipszist használni, és így a keresés futási idejét optimalizálni. A lefedett paramétertérterület az össztömeg (M_b) és a detektor érzékenysége határozza meg. Ez a VIRGO detektor érzékenysége esetén $M_b = 1 - 30M_\odot$ tömegű rendszerekre $f_0 = 30\text{Hz}$ frekvenciára és 98%-os minimális egyezésre ez 50000 diszkrét pontot (ellipszist) jelent a paramétertérben [4].



5. ábra. Az ellipszisekkel lefedett paraméterter [4]

B. Nem zérus spin

Ha a spin nem zérus, a paraméterter magasabb dimenziós lesz, mint kettő, így sokkal bonyolultabb lesz a tér lefedése, és több diszkrét pontot kell megvizsgálni az adatok feldolgoása során. A jelalak nem zérus spin esetén a 6. ábrán látható [15].



6. ábra. A gravitációs hullám jelalakja zérus spinű (felső ábra) és nem zérus spinű (alsó ábra) BH-NS rendszer esetén. A két rendszer minden fizikai paramétere a – spint leszámítva – azonos.[15]

Kompakt bespiráló kettős esetén a pálya-spin és spin-spin csatolások erős precessziót okozhatnak a pályasíokban [15]. Ez a gravitációs hullám jelében amplitúdó és fázis modulációt fog adni [15].

-
- [1] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration: J. Abadie, B. P. Abbott, R. Abbott, et al., Phys. Rev. **D 83**, 122005 (2011), URL <http://arxiv.org/abs/1102.3781>.
 - [2] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration: B. Abbott, et al., Phys. Rev. **D 73**, 062001 (2006), URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0509129>.
 - [3] Benjamin J. Owen, B. S. Sathyaprakash, Classical and Quantum Gravity **D 60**, 022002 (1999), URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9808076>.
 - [4] Frédérique MARION, *Data Analysis: Coalescing Binaries (a brief introduction, mostly qualitative)* (2009), URL workarea.ego-gw.it/ego2/virgo/data-analysis/vesf-da-schools/school-winter-2010/DA_CB_2009.pdf.
 - [5] F. Ohme, Classical and Quantum Gravity **29**, 124002 (2012), URL <http://stacks.iop.org/0264-9381/29/i=12/a=124002>.
 - [6] Eric Chassande-Mottin, Miriam Miele, Satya Mohapatra, Laura Cadonati, Classical and Quantum Gravity **27**, 194017 (2010), URL <http://arxiv.org/abs/1005.2876>.
 - [7] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration: J. Aasi, J. Abadie, B. P. Abbott, R. Abbott, et al., ApJS **211**, 7 (2014), URL <http://arxiv.org/abs/1310.2314>.
 - [8] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration: J. Aasi, J. Abadie, B. P. Abbott, et al., Phys. Rev. **D 87**, 062001 (2013), URL <http://arxiv.org/abs/1209.6533>.
 - [9] Peter Shawhan, *Gravitational Wave Data Analysis* (2014), URL http://www.physics.umd.edu/rgroups/grt/buonanno/Phys879-2014/GWDA_May6.pdf.
 - [10] The LIGO Scientific Collaboration: B. Abbott, et al, Nucl. Instrum. Meth. **A 517**, 154 (2004), URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0308043>.
 - [11] *Discrete Fourier transform*, Wikipedia, URL http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform.
 - [12] *Fast Fourier transform*, Wikipedia, URL <http://en.wikipedia.org/wiki/Fft>.
 - [13] Ilya Mandel, Richard O’Shaughnessy, Classical and Quantum Gravity **27**, 114007 (2010), URL <http://arxiv.org/abs/0912.1074>.
 - [14] Johan Samsing, Morgan MacLeod, Enrico Ramirez-Ruiz (2013), URL <http://arxiv.org/abs/1308.2964>.
 - [15] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration: B. Abbott, et al., Phys. Rev. **D 78**, 042002 (2008), URL <http://arxiv.org/abs/0712.2050>.