Gravitációshullám-asztrofizika

Házidolgozat

A gravitációs hullámok általános relativitáselméleti háttere 1.

– Az Einstein-egyenletek hullámmegoldása,

– A GH-ok kölcsönhatása geodetikus mozgást végző tömegpontokkal.

Készítette:

Gondán László

fizikus hallgató

Budapest

2011

1. Bevezetés

A dolgozat a gravitációs hullámok általános relativitáselméleti leírását tárgyalja, ennek megfelelően az általános relativitáselméleti hátteret nem mutatjuk be, de a dolgozat számolásaihoz felhasznált, nélkülözhetetlen, a téridő geometriájának jellemzéséhez szükséges tenzorokat a mostani bevezetőben felsorolásszerűen megadjuk, a tenzorok és tulajdonságaik megtalálhatók [1] könyvben:

– Christofell-szimbólum:

$$\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\beta}} \right) \tag{1}$$

– a görbületi-tenzor:

$$R^{\mu}_{\nu\gamma\alpha} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\gamma\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\mu}_{\gamma\beta}\, \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\, \Gamma^{\beta}_{\gamma\nu} \tag{2}$$

– Ricci-tenzor:

$$R_{\mu\nu} = R^{\gamma}_{\mu\gamma\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\nu\mu}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\gamma\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\gamma}_{\gamma\alpha}\, \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} - \Gamma^{\gamma}_{\nu\alpha}\, \Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu} \tag{3}$$

– Ricci-skalár:

$$R = R_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu} \tag{4}$$

– Einstein-tenzor:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{5}$$

Einstein elmélete alapján a téridő geometriáját az anyagi mezők befolyásolják. A téridő geometriájának változását leíró egyenleteket az Einstein-egyenlet adja meg:

$$G_{\mu\nu} = 8\,\pi\, T_{\mu\nu} \tag{6}$$

Az anyagi mező változóira vonatkozó mozgásegyenletek a Lagrange-féle variációszámítás módszere alapján lehet megadni:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu}} = \nabla_{\nu} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial_{\mu} \nabla_{\nu} \phi} \right) \tag{7}$$

Az így megadott parciális differenciálegyenlet-rendszer adja meg az anyagi változókra és metrikus változókra vonatkozó evolúciós egyenleteket.

2. Az Einstein-egyenletek hullámmegoldása

2.1. Gyenge-tér közelítés és mértéktranszformációk

A gravitációs mező eltűnésével a téridő sík. Ennek megfelelően a gyenge gravitációs terek úgy definiálhatók, melyek térideje "közelítőleg sík". A "közelítőleg sík" téridő azt jelenti, hogy található olyan koordinátarendszer, melyben a metrikus tenzor komponensei felírhatók

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{8}$$

alakban, ahol

$$\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1) \tag{9}$$

a Minkowski téridő metrikája, a $h_{\mu\nu}$ komponensekre pedig teljesül, hogy $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ minden μ , ν komponensre. Az olyan koordinátarendszert, mely a fenti tulajdonságoknak eleget tesz, közelítőleg Lorentz-koordinátarendszernek nevezzük. Feltétel volt, hogy találjunk egy ilyen koordinátarendszert. Az általános relativitáselméletben koordinátarendszerek között tetszőleges transzformációkat végrehajthatunk, ezért nem biztos, hogy ha az egyik koordinátarendszerünk közelítőleg sík, akkor egy tetszőleges koordinátatranszformáció után is közelítőleg sík marad.

A most következőkben megvizsgáljuk, hogy mi a feltétele annak, hogy egy közel sík koordinátarendszer koordinátatranszformáció után is közel sík maradjon. Hajtsunk végre egy infinitezimális koordinátatranszformációt, mely a koordinátákat

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \zeta^{\alpha}(x^{\beta}) \tag{10}$$

módon transzformálja. ζ^{α} a koordináták (x^{β}) függvénye. A fenti egyenlet átírható, kifejezve a vesszőtlen koordinátát a vesszős koordináta függvényével

$$x^{\alpha} = x'^{\alpha} - \zeta^{\alpha}(x^{\beta}). \tag{11}$$

Megköveteljük ζ^{α}-ra, hogy $\zeta^{\alpha} \ll 1$, valamit $|\zeta,^{\alpha}_{\beta}| \ll 1$ feltételek teljesüljenek minden α, β komponens esetében. Elvégezve a deriválást x'^{γ} szerint, a fenti egyenletet a láncszabály felhasználásával a

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\gamma}} = \delta^{\alpha}_{\gamma} - \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\gamma} - \zeta^{\alpha}_{\gamma} \tag{12}$$

alakra lehet hozni. Kihasználtuk, hogy csak a ζ^{α}-szerinti elsőrendű tagokat vettük figyelembe, illetve, hogy a Kronecker-delta minden koordinátarendszerben ugyanaz. Tegyük fel, hogy a vesszőtlen rendszerünk közelítőleg sík, vagyis teljesíti a (8), (9) feltételeket. Nézzük meg, hogy mik lesznek a vesszős rendszerben a metrikus tenzor komponensei. A vesszőtlen metrikus tenzort a vesszős rendszerbe transzformálva

$$g_{'\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu} \tag{13}$$

kifefejezést kapjuk. Ennek átalakításához felhasználva (8), (12) egyenleteket, majd helyettesítés után csak az első rendig figyelembe véve a tagokat, $g'_{\alpha\beta}$ eleget tesz a következő egyenletnek

$$g'_{\alpha\beta} = \left(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \zeta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\mu}_{\alpha}\right)\eta_{\mu\nu} + \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}h_{\mu\nu}. \tag{14}$$

Egyszerű átalakítások után (felhasználva, hogy első rendben $\zeta_{\alpha} = g_{\alpha\nu}\zeta^{\nu} = \eta_{\alpha\nu}\zeta^{\nu}$), a fenti egyenlet az

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \zeta_{\alpha,\beta} - \zeta_{\beta,\alpha} \tag{15}$$

alakra hozható. Az átalakítások során felhasználtuk, hogy a $\eta_{\mu\nu}$ komponensek koordináták szerinti deriváltjai nullák, továbbá a komponenseket most is első rendig vettünk figyelembe. Összehasonlítva (12) és (15) egyenleteket, a $h'_{\alpha\beta}$ vesszős változó kifejezésére

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \zeta_{\alpha,\beta} - \zeta_{\beta,\alpha}. \tag{16}$$

egyenlet adódik. ζ_{α}-ra és $h_{\alpha\beta}$-ra kirótt megkötések alapján elmondható, hogy a vesszős rendszer $h'_{\alpha\beta}$ metrikus perturbációja is teljesíti a $|h'_{\alpha\beta}| \ll 1$ feltételt minden α, β esetben. A számolásokból következik, hogy ha olyan általános koordinátatranszformációkat alkalmazunk, melyek a koordinátákat csak infinitezimális mértékben változtatják, akkor az eredetileg közel sík téridőnk a transzformációk elvégzése után is közel sík marad. Az olyan transzformációkat, melyek tudják (16) feltételt, mértéktranszformációknak nevezzük. Segítségükkel az Einstein-egyenletek az adott probléma szempontjából a legegyszerűbb alakra hozhatók.

2.2. Einstein-egyenletek gyenge-tér közelítésben

A "közelítőleg sík" téridőben a $h_{\alpha\beta}$ komponensekre vonatkozó Einstein-egyenletek meghatározásához először meg kell határozni a görbületi tenzor, a Ricci-tenzor és a Ricci-skalár kifejezését A részletesebb számolások megtalálhatók [2] jegyzetben, a most következőkben a számolásokat vázlatosan ismertetjük. A teljesen kovariáns görbületi tenzor alakja:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu}R^{\mu}_{\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu}\left(\Gamma^{\sigma}_{\beta\delta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\Gamma^{\mu}_{\sigma\delta} + \Gamma^{\mu}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma,\delta}\right). \tag{17}$$

Az így megadott görbületi tenzorban a Christoffel-szimbólumba behelyettesítve (8)-at, majd csak az elsőrendben kicsiny tagokat megtartva az alábbi végeredményt kapjuk

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\delta,\beta\gamma} + h_{\beta\gamma,\alpha\delta} - h_{\alpha\gamma,\beta\delta} - h_{\beta\delta,\alpha\gamma}\right). \tag{18}$$

Könnyen megmutatható, hogy a fent megadott kifejezés független a mértéktranszformációktól. (16)-ból kifejezve $h_{\mu\nu}$-t, majd visszahelyettesítve a megfelelő indexekben és kihasználva a Young-tételt,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \tag{19}$$

a fenti állítás igazolható. Az Einstein-egyenlet felírásához meg kell határozni a Ricci-tenzort és a Ricci-skalárt (3), (4) alapján. Ezek $h_{\mu\nu}$-ben elsőrendű kifejezéseire rövid számolás után a következők adódnak:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} + h^{\alpha}_{\nu,\mu\alpha} - h^{;\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - h_{,\mu\nu}\right), \tag{20}$$

$$R = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \tag{21}$$

Felhasználtuk, hogy $\eta_{\mu\nu}$ elemei konstansok, továbbá az alábbi kifejezéseket vezettük be, $h^{;\alpha}_{\mu\nu,\alpha} = \eta^{\alpha\sigma}\left(h_{\mu\nu,\alpha}\right)_{,\sigma}$, $h = h^{\alpha}_{\alpha} = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$. Visszahelyettesítve az így kapott kifejezéseket (5)-be majd a számolások elvégzése után az Einstein-tenzor komponensei első rendben, kovariáns formában

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[h^{;\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + h^{;\alpha}_{\nu\alpha,\mu} - h^{;\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\left(h^{;\alpha\beta}_{\alpha\beta} - h^{;\beta}_{,\beta}\right)\right]. \tag{22}$$

A fenti egyenlet $h_{\mu\nu}$ transzformációjával tovább egyszerűsíthető. Bevezetve

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \tag{23}$$

kifejezést, $G_{\mu\nu}$ leegyszerűsíthető. A behelyettesítés és a számolások elvégzése után

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left[\bar{h}^{;\alpha}_{\mu\nu,\alpha} + \eta_{\mu\nu}\bar{h}^{;\alpha\beta}_{\alpha\beta} - \bar{h}^{;\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \bar{h}^{;\alpha}_{\nu\alpha,\mu}\right]. \tag{24}$$

Ennek megfelelően felírhatjuk a $\bar{h}_{\mu\nu}$ komponensekre vonatkozó Einstein-egyenleteket (6)-nek megfelelően,

$$\bar{h}^{;\alpha}_{\mu\nu,\alpha} + \eta_{\mu\nu}\bar{h}^{;\alpha\beta}_{\alpha\beta} - \bar{h}^{;\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \bar{h}^{;\alpha}_{\nu\alpha,\mu} = -16\,\pi T_{\mu\nu}. \tag{25}$$

A fenti egyenlet további egyszerűsítését a mértéktranszformációk teszik lehetővé. Első lépésben megmutatjuk, hogy a $\bar{h}^{\mu\alpha}_{,\alpha} = 0$ feltétellel rögzített mérték segítségével (25) bal oldalának utolsó 3 tagja azonosan nullát ad. Az egyszerűsítéseket kiírjuk, mivel nemtriviális lépéseket is tartalmaznak,

– első tag:

$$\begin{aligned}\bar{h}^{;\alpha\beta}_{\alpha\beta} &= \left(\eta_{\alpha\gamma}\,\eta_{\beta\sigma}\,\bar{h}^{\gamma\sigma}\right)^{,\alpha\beta} = \left(\eta_{\alpha\gamma}\,\eta_{\beta\sigma}\,\eta^{\alpha\tau}\,\eta^{\beta\epsilon}\,\bar{h}^{\gamma\sigma}_{,\tau\epsilon}\right) \\ &= \delta^{\tau}_{\gamma}\,\delta^{\epsilon}_{\sigma}\,\bar{h}^{\gamma\sigma}_{,\tau\epsilon} = \bar{h}^{\gamma\sigma}_{,\gamma\sigma} = \left(\bar{h}^{\gamma\sigma}_{,\sigma}\right)_{,\gamma} = 0,\end{aligned} \tag{26}$$

felhasználtuk, hogy $\eta_{ab}\,\eta^{bc} = \delta^{c}_{a}$, valamint, az utolsó tagban a zárójelen belül a mértékfeltételt,

– második tag:

$$\begin{aligned}\bar{h}^{;\mu}_{\mu\alpha,\nu} &= \eta_{\mu\gamma}\,\eta_{\alpha\sigma}\,\left(\bar{h}^{\gamma\sigma}_{,\nu}\right)^{,\alpha} = \eta_{\mu\gamma}\,\eta_{\alpha\sigma}\,\eta^{\alpha\tau}\,\bar{h}^{\gamma\sigma}_{,\nu\tau} = \\ &\eta_{\mu\gamma}\,\delta^{\tau}_{\sigma}\,\bar{h}^{\gamma\sigma}_{,\nu\tau} = \eta_{\mu\gamma}\,\bar{h}^{\gamma\sigma}_{,\nu\sigma} = \eta_{\nu\gamma}\,\left(\bar{h}^{\gamma\sigma}_{,\sigma}\right)_{,\sigma}.\end{aligned} \tag{27}$$

– harmadik tag:

$$\bar{h}^{;\alpha}_{\nu\alpha,\mu} = \eta_{\nu\gamma}\,\eta_{\alpha\sigma}\,\left(\bar{h}^{\gamma\sigma}_{,\mu}\right)^{,\alpha} = \eta_{\nu\gamma}\,\eta_{\alpha\sigma}\,\eta^{\alpha\tau}\,\bar{h}^{\gamma\sigma}_{,\mu\tau} =$$
$$\eta_{\nu\gamma}\,\delta^{\tau}_{\sigma}\,\bar{h}^{\gamma\sigma}_{,\mu\tau} = \eta_{\nu\gamma}\,\bar{h}^{\gamma\sigma}_{,\mu\sigma} = \eta_{\nu\gamma}\,\left(\bar{h}^{\gamma\sigma}_{,\sigma}\right)_{,\mu}. \tag{28}$$

Következő lépésben megmutatjuk, hogy az infinitezimális mértéktranszformációk segítségével mindig lehet találni olyan ζ^{μ} vektormezőt, mely az előbb megadott mértéktranszformációs tulajdonságot teljesíti. Tegyük fel, hogy $h^{(reg)}_{\mu\nu} \neq 0$ teljesül minden μ, ν-re. (16) mértéktranszformáció után

$$h^{(uj)}_{\mu\nu} = h^{(reg)}_{\mu\nu} - \zeta_{\mu,\nu} - \zeta_{\nu,\mu}. \tag{29}$$

Értelmezhetjük $\bar{h}^{(uj)}_{\mu\nu}$-t (23) alapján, majd (29) helyettesítésével az átalakításokat elvégezve adódik,

$$\bar{h}^{(uj)}_{\mu\nu} = h^{(uj)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\,\eta^{\alpha\beta}\,h^{(uj)}_{\alpha\beta} = \bar{h}^{(reg)}_{\mu\nu} - \zeta_{\mu,\nu} - \zeta_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\,\zeta^{\beta}_{,\beta}. \tag{30}$$

A mértékrögzítő feltétel alapján

$$\bar{h}^{(uj)\mu\nu} = \bar{h}^{(reg)\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\,\zeta_{\alpha,\beta} - \eta^{\mu\alpha}\,\eta^{\nu\beta}\,\zeta_{\beta,\alpha} + \eta_{\mu\nu}\,\zeta^{\sigma}_{,\sigma}, \tag{31}$$
$$\bar{h}^{(uj)\mu\nu}_{,\nu} = \bar{h}^{(reg)\mu\nu}_{,\nu} - \eta^{\nu\beta}\,\zeta^{\mu}_{,\beta\nu} - \eta^{\mu\alpha}\,\zeta^{\sigma}_{,\sigma\alpha} + \eta^{\mu\nu}\,\zeta^{\sigma}_{,\sigma\nu}. \tag{32}$$

A második egyenlet utolsó tagja az α, ν összegző indexek megfeleltetése miatt kiejti egymást, így végeredményben kapjuk

$$\bar{h}^{(uj)\mu\nu}_{,\nu} = \bar{h}^{(reg)\mu\nu}_{,\nu} - \eta^{\nu\beta}\,\zeta^{\mu}_{,\beta\nu} \tag{33}$$

Újra kihasználva a mértéket rögzítő feltételünket ($\bar{h}^{(uj)\mu\alpha}_{,\alpha} = 0$), a kapott differenciálegyenlet a ζ^{μ} változóra:

$$\bar{h}^{(reg)\mu\nu}_{,\nu} = \eta^{\nu\beta}\,\zeta^{\mu}_{,\nu\beta} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\zeta^{\mu} \tag{34}$$

Ennek a másodrendű parciális differenciálegyenletnek a metrikus komponensek, $h^{\mu\nu}$ jó megválasztása mellett mindig létezik megoldása ζ^{μ}-ra. A $\bar{h}^{(uj)\mu\alpha}_{,\alpha} = 0$ feltétellel bevezetett mértéket Lorentz-mértéknek nevezzük. Ebben a mértékben a perturbált metrikus változókra vonatkozó Einstein-egyenletek az alábbi egyszerű alakot öltik:

$$-\bar{h}^{;\alpha}_{\mu\nu,\alpha} = 16\,\pi\,T_{\mu\nu} \tag{35}$$

2.3. Az Einstein-egyenletek vákuum megoldása

A (35) egyenlet megoldását meg kell vizsgálni vákuummegoldások esetében, hogy lássuk, az egyenlet felírható-e a jól ismert hullámegyenlet alakjában. Ez fontos, mivel ezzel lehet igazolni, hogy az így kapott "gravitációs hullámok" a forrásról leszakadva a szabad térben tudnak terjedni. Vákuummegoldás esetében $T_{\mu\nu}$ komponensek azonosan nullák, ezért (35) egyenlet felírható

$$\bar{h}^{;\alpha}_{\mu\nu,\alpha} = \eta^{\alpha\alpha}\,\bar{h}_{\mu\nu,\alpha\alpha} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{36}$$

alakban. A számolások elején a $c = 1$ egységrendszert választottuk. Ha ehelyett visszatérünk c-t jellemző egységrendszerre, akkor kihasználva, hogy $\eta^{00} = -1/c^2$, a fenti egyenlet a jól ismert, hullámegyenletet adja vissza a $\bar{h}_{\mu\nu}$ komponensekre, melyek fénysebességgel terjednek a szabad térben. Ezzel megmutattuk, hogy az Einstein-i általános relativitáselméletnek léteznek hullámmegoldásai.

2.4. TT Gauge

(36) hullámegyenlet megoldásait az alábbi alakban érdemes keresni,

$$\bar{h}_{\mu\nu} = Re\left[A_{\mu\nu}\, exp(ik_\alpha x^\alpha)\right]. \tag{37}$$

A Re funkció a valós részt jelenti, $A_{\mu\nu}$ a hullám amplitúdó, k_α pedig a négyes hullámszámvektor. A Lorentz-mérték feltétele és $\bar{h}_{\mu\nu}$ tenzor jellege alapján a következő megállapítások tehetők:

- $\bar{h}_{\mu\nu}$ szimmetrikus tenzor, ennek megfelelően $A_{\mu\nu}$ is szimmetrikus, ami folytán csak 10 független komponense van,
- A Lorent-mérték feltételéből adódik, hogy

  $$\bar{h}^{\mu\alpha}_{,\alpha} = A^{\mu\alpha}\, k_\alpha = 0. \tag{38}$$

  Az eredmény értelmezhető úgy, hogy a hullám amplitúdója merőleges a négyes hullámszámvektorra, vagyis a gravitációs hullám transzverzális hullám. Ez négy egyenletet ad az amplitúdó komponensei között, vagyis csak hat lehet független egymástól.
- felhasználva a kovariáns deriváló operátorok kommutációs tulajdonságát, valamint a mértékrögzítő feltételt alsó indexekben, felírható az alábbi egyenlet:

  $$\bar{h}^{;\alpha}_{\mu\nu,\alpha} = \eta^{\alpha\sigma}\,\bar{h}_{\mu\nu,\alpha\sigma} = 0, \tag{39}$$

  melyből következik, hogy $k_\alpha\, k^\alpha = 0$, a négyes hullámszámvektor fényszerű négyesvektor

A mértéktranszformációt meghatározó feltétel alapján megmutattuk, hogy bármilyen $\bar{h}^{(reg)\mu\nu}$ tenzorhoz megadható olyan ζ^α mértéktranszformációt meghatározó négyesvektor mely kielégíti (34) egyenletet. A következőkben megmutatjuk, hogy ennek segítségével az $A_{\mu\nu}$ négyes amplitúdó 6 független komponense tovább redukálható 2 független komponensé. Ennek belátásához vegyük észre, hogy (34) nem határozza meg egyértelműen ζ^μ-t, ugyanis amikor megadjuk a $x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu$ mértéktranszformációt, hogy eleget tegyünk a mértékfeltételnek, akkor ζ^μ-höz hozzáadható egy tetszőleges ψ^μ négyesvektor ($\zeta^\mu \to \zeta^\mu + \psi^\mu$), mely (34) alapján kielégíti a

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\psi^\mu = 0 \tag{40}$$

másodrendű parciális differenciálegyenletet, (34) teljesülése mellett. Ennek megfelelően bevezetve $\xi_\mu = \zeta_\mu + \psi_\mu$ változót, felírható a mértéktranszformáció után a mértéktranszformációnak eleget tevő új perturbált $\bar{h}^{(TT)}_{\mu\nu}$ komponens:

$$\bar{h}^{(TT)}_{\mu\nu} = \bar{h}^{(reg)}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \tag{41}$$

ψ_μ megválasztható úgy, hogy teljesüljenek az alábbi feltételek:

$$\bar{h}^{(TT)}_{\mu t} = 0 \qquad \forall\, \mu \tag{42}$$

$$\bar{h}^{(TT)\mu}_{\mu} = 0 \tag{43}$$

A két egyenlet ψ_μ-re ad kényszereket, ennek megfelelően (40) egyenlet azon partikuláris megoldásai jók, melyek teljesítik az alábbi két egyenletet:

$$\bar{h}^{(reg)}_{\mu t} - \zeta_{\mu,t} - \zeta_{t,\mu} - \psi_{\mu,t} - \psi_{t,\mu} = 0, \tag{44}$$

$$\psi^{,\mu}_{\mu} = \frac{1}{2}\bar{h}^{(reg),\mu}_{\mu} - \zeta^{,\mu}_{\mu}. \tag{45}$$

Ekkor az amplitúdó komponensekre teljesül, hogy $A^\mu_\mu = 0$, $A_{\mu t} = 0$, $\forall\, \mu$-re. A fenti transzformációval megadott mértéktranszformációt nevezik TT Gauge-nek, a transzformációval kapható komponenseket pedig felül (TT) indexel jelölik. Tegyük fel, hogy a nyugalmi megfigyelőhöz rögzített koordinátarendszerben "z"-irányban egy gravitációs hullám jön be. Ekkor $k^x = 0$, $k^y = 0$, $k^z = \omega$, $k^t = \omega$. A perturbált metrikus-tenzor komponensei ekkor eleget tesznek a

$$\bar{h}^{(TT)}_{\mu\nu} = A^{(TT)}_{\mu\nu}\, cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \tag{46}$$

egyenletnek. Ebben az esetben $\bar{h}^{(TT)\mu\alpha}_{,\alpha}$ feltétel alapján $A_{\mu z}\, k^z = 0$ egyenletek adódnak, melyek következtében $A_{\mu z} = 0$ minden μ-re. Ez további 4 feltétel, így összesen két független komponens marad. Ezek és (42) alapján felírhatók $\bar{h}^{(TT)}_{\mu\nu}$ komponensei mátrix formában reprezentálva

$$\bar{h}^{(TT)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}_+ & \bar{h}_\times & 0 \\ 0 & \bar{h}_\times & -\bar{h}_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

vagy másképpen, megkülönböztetve $\bar{h}_+$-hoz és $\bar{h}_\times$-hez tartozó tenzorok koordináta-reprezentációit, $\bar{h}^{(TT)}_{\mu\nu} = \bar{h}_{+\mu\nu} + \bar{h}_{\times\mu\nu}$,

$$\bar{h}^{(TT)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{h}_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_\times & 0 \\ 0 & \bar{h}_\times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

Továbbá felírhatók a komponensek az amplitúdók megfelelő helyettesítésével (46) egyenlet alapján

$$\bar{h}_+ = A_+ \, cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right), \tag{49}$$

$$\bar{h}_\times = A_\times \, cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right). \tag{50}$$

3. GH-ok kölcsönhatása geodetikus mozgást végző tömegpontokkal

A GH-ok szabad tömegpont mozgására gyakorolt hatását egy adott megfigyelő szerinti vonatkoztatási rendszerben írjuk le, melynek során a megfigyelő a próbatest mozgását egy másik próbatesthez képest írja le. Ezért a továbbiakban a GH-ok hatását két próbatest egymáshoz viszonyított geodetikus mozgásuk segítségével jellemezzük. A próbatestek olyan tömegpontok, melyek nem hatnak vissza mozgásuk révén a téridő geometriájára, vagyis a metrika térkoordináták szerinti függése adott, (7) egyenletet nem kell figyelembe venni. Az egyes próbatesteket 1 és 2-vel indexeljük. A próbatestek négyes helyvektorai $x(\tau)^\mu_1$ és $x(\tau)^\mu_2 = x(\tau)^\mu_1 + \zeta(\tau)^\mu$, a geodetikus mozgásegyenletek a próbatestekre:

$$0 = \frac{d^2 x^\mu_1}{d\tau^2} + \Gamma(x_1)^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx_{1\alpha}}{d\tau}\frac{dx_{1\beta}}{d\tau}, \tag{51}$$

$$0 = \frac{d^2 x^\mu_2}{d\tau^2} + \Gamma(x_2)^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx_{2\alpha}}{d\tau}\frac{dx_{2\beta}}{d\tau}. \tag{52}$$

$\Gamma(x_2)^\mu_{\alpha\beta}$ Christoffel-szimbólum az x^μ_2-re vonatkozó kifejezés segítségével sorbafejthető x^μ_1 körül,

$$\Gamma(x^\nu_2)^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma(x^\nu_1 + \zeta^\nu)^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma(x^\nu_1)^\mu_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\nu}\,\zeta^\nu. \tag{53}$$

Kivonva (51) és (52)-t egymásból, majd helyettesítve (53)-at és csak a ζ^μ-ben elsőrendű tagokat megtartva az alábbi egyenlet adódik,

$$\frac{d^2\zeta^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} v^\alpha \frac{d\zeta^\beta}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} v^\beta \frac{d\zeta^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma}\zeta^{,\gamma} v^\alpha v^\beta = 0. \tag{54}$$

Az így meghatározott egyenlet nem tenzoregyenlet, mivel Γ nem tenzorként transzformálódik. A fenti egyenlet azonban átírható tenzoros formában a következő lépésekben.

Írjuk fel ζ^μ kovariáns deriváltját és kétszeres kovariáns deriváltját

$$\frac{D\zeta^\mu}{D\tau} = \frac{d\zeta^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\zeta^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau}, \tag{55}$$

$$\frac{D^2\zeta^\mu}{D^2\tau} = \frac{D}{D\tau}\left(\frac{D\zeta^\mu}{D\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{D\zeta^\mu}{D\tau}\right) + \Gamma^\mu_{\sigma\gamma}\frac{D\zeta^\sigma}{D\tau}v^\sigma. \tag{56}$$

Az első deriváltból helyettesítve $\frac{D\zeta^\mu}{D\tau}$ kifejezést, a deriválásokat elvégezve és kihasználva, hogy a próbatestünk geodetikus mozgást végez, vagyis

$$\frac{dv^\beta}{d\tau} = \frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} = -\Gamma^\beta_{\sigma\delta}\, v^\sigma\, v^\delta. \tag{57}$$

Rövid számolás után kapjuk, az indexek permutációjával, hogy

$$\begin{aligned}\frac{D^2\zeta^\mu}{D\tau^2} = \frac{d^2\zeta^\mu}{d^2\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma}v^\gamma\zeta^\alpha v^\beta + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{d\zeta^\alpha}{d\tau}v^\beta\Gamma^\mu_{\sigma\delta}\frac{d\zeta^\alpha}{d\tau}v^\sigma + \\ \left(\Gamma^\mu_{\beta\delta}\Gamma^\beta_{\alpha\sigma} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\delta}\right) v^\sigma\, v^\delta\, \zeta^\delta.\end{aligned} \tag{58}$$

(54) felhasználásával kifejezhetjük $\frac{d^2\zeta^\mu}{d\tau^2}$-et,

$$\frac{d^2\zeta^\mu}{d\tau^2} = -\left(\Gamma^\mu_{\alpha\beta}v^\alpha\frac{d\zeta^\beta}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}v^\beta\frac{d\zeta^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma}\zeta^{,\gamma}v^\alpha\, v^\beta\right). \tag{59}$$

Ezt visszahelyettesítve (58) egyenletbe, majd felhasználva a görbületi tenzor (2) kifejezését, egyszerű átalakításokkal kapjuk

$$\frac{D^2\zeta^\mu}{D\tau^2} = R^\mu_{\alpha\beta\gamma}v^\alpha\, v^\beta\, \zeta^\gamma. \tag{60}$$

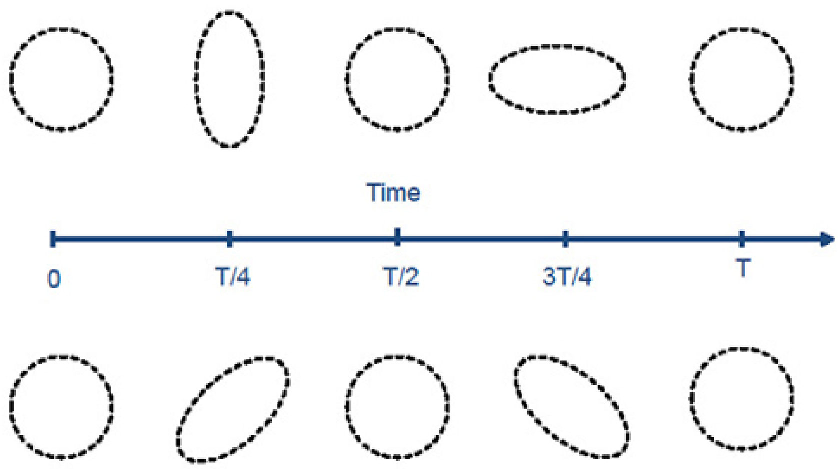
Tehát a két pont közötti négyes helyvektor különbségére vonatkozó mozgásegyenletet a fenti egyenlet adja. A próbatestek geodetikus mozgást végeznek. Tegyük fel, hogy a két próbatest, vagy ha úgy tetszik a próbatest és a viszonyítási pont (amely ugyancsak egy próbatest) a megfigyelő rendszerében legyen nyugalomban. A viszonyítási pont legyen az origóban, a próbatest pedig a $(\delta x, \delta y, \delta z)$ koordinátapontban. Ekkor

$$v^\alpha = (1, 0, 0, 0) \tag{61}$$

$$\zeta^\alpha = (0, \delta x, \delta y, \delta z) \tag{62}$$

(60) mozgásegyenletben a sajátidőt lehet helyettesíteni a koordinátaidővel, t-vel, mivel a metrikánk infinitezimálisan tér el a sík téridő metrikájától és ζ^α is infinitezimális. Továbbá felhasználva a második kovariáns derivált alakját, (56)-ot és Γ-ra vonatkozó (1) egyenletet valamint (8)-at, könnyen belátható, hogy a második deriváltból csak a t koordinátaidő szerinti második derivált marad meg mint elsőrendű tag ζ^α-ban, ezért az alábbi egyszerű egyenletet kapjuk

$$\frac{\partial^2\zeta^\alpha}{\partial t^2} = R^\alpha_{tt\beta}\zeta^\beta \tag{63}$$



1. ábra. a TT Gauge-ben leírt gravitációs hullám h_+ és $h_\times$ komponensei által előidézett torzulás egy gyűrűre

(18) görbületi tenzor komponenseinek felhasználásával (szem előtt tartva, hogy végig TT Gauge-ben vagyunk, "z" tengely mentén bejövő gravitációs hullám) megadható az alábbi mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial^2 \zeta_\alpha}{\partial t^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{h}^{(TT)}_{\alpha\beta}}{\partial^2 t}\zeta^\beta \tag{64}$$

A fenti egyenletet kiintegrálva a következőt kapjuk:

$$\zeta(t)_\alpha = -\frac{1}{2}\bar{h}(t)^{(TT)}_{\alpha\beta}\zeta(0)^\beta + C\,t + D \tag{65}$$

C a kezdősebesség és D a kezdeti helykoordináta. Tegyük fel, hogy kezdetben a próbatest nem mozgott és az origóban volt. Ekkor képezve a

$$\Delta\zeta(t)_\alpha = \zeta(t)_\alpha - \zeta(0)_\alpha \tag{66}$$

kifejezést, a

$$\Delta\zeta(t)_\alpha = -\frac{1}{2}\bar{h}^{(TT)}_{\alpha\beta}\zeta(0)^\beta \tag{67}$$

egyenletet kapjuk. Most kihasználhatjuk a TT Gauge mértéket és helyettesíthetjük $h^{(TT)}_{\alpha\beta}$-t. Hogy megértsük h_+ és $h_\times$ jelölés értelmét, tegyük fel, hogy $\zeta^\mu = (0, \delta x, \delta y, 0)$. Vizsgáljuk azt a két speciális esetet, amikor $\bar{h}^{TT}_{\mu\nu} = \bar{h}^{TT}_{+\mu\nu}$ és $\bar{h}^{TT}_{\mu\nu} = \bar{h}^{TT}_{\times\mu\nu}$. Az első esetben (67) alapján a megoldás

$$\Delta x = -\frac{1}{2}A_+ exp\left(i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\delta x(0), \tag{68}$$

$$\Delta y = -\frac{1}{2}A_+ exp\left(i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\delta y(0), \tag{69}$$

míg a második esetben

$$\Delta x = \frac{1}{2} A_\times exp\left(i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\delta y(0), \tag{70}$$

$$\Delta y = \frac{1}{2} A_\times exp\left(i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\delta x(0). \tag{71}$$

A megoldásokból látható, hogy a próbatestek közötti távolság megváltozása arányos a kezdeti távolságkülönbségekkel. A fenti két eset megoldásaiból adódó deformációkat egy, az $x - y$ síkban levő gyűrű esetében az 1. ábra szemlélteti. A felső ábra sorozat a h_+ komponens által előidézett deformációkat mutatja be a gravitációs hullám periódusidejének meghatározott értékeire, míg az alsó ábra sorozat a $h_\times$ komponens hatását illusztrálja. További esetek vizsgálata megtalálható [2] jegyzetben.

Hivatkozások

[1] R.M. Wald., (1984), *General Relativity*, University of Chicago Press

[2] Dr. Martin Hendry, (2007), *An Introduction to General Relativity, Gravitational Waves and Detection Principles*