

GRAVITÁCIÓS HULLÁM SZTOCHASZTIKUS HÁTTÉR

Gravitációs hullám sztochasztikus háttér forrásai és keresési stratégiája. Eddigi eredmények.

Készítette: Prónai Anett

Raffai Péter: Gravitációshullám asztofizika előadás

Fizikus MSc

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Kozmológiai maradványsugárzás	2
3. A háttérsugárzás keresése	5
3.1. Alapelvek	5
3.2. Az átfedési függvény	8
3.3. Szűrőfüggvény	10
4. Detektálás	14
5. Eddigi eredmények	16

1. Bevezetés

A gravitációshullám detektálás új fejezetet nyit az asztrofizika történetében. Egy új típusú információforráshoz jutunk a gravitációs hullámok által, így már nem csak elektromágneses jelekre hagyatkozhatunk az asztrofizikai objektumok felderítésénél. Az asztrofizikában a legtöbben számítanak új, eddig ismeretlen gravitációshullám források felfedezésére is, de vannak ismert gravitációshullám források is¹. Ilyenek a kompakt kettősök, az aszimmetrikus kompakt forgó objektumok, illetve a szupernóvák. Ez előbbi kettő hullámjelét többé-kevésbé ismerjük, és nagy-erejű számítógépek segítségével igyekszünk kiemelni a háttérzajból. A szupernóvák detektálása több nehézségbe ütközik az előzőeknél is, mivel jelalakjuk nem ismert, és előfordulásuk is ritka, előre nem jósolható. A sztochasztikus gravitációshullám háttérsugárzás (Stochastic Gravitational-Wave Background, SGWB) ebből a szempontból egy teljesen más típusú „jelforrás”, és más detektálási módszert igényel.

Az SGWB, definíció szerint, nagyszámú asztrofizikai vagy kozmológiai eredetű, felbontatlan gravitációs hullámok szuperpozíciójából áll össze [1]. Ennek megértéséhez vissza kell térnünk az optikai felbontáshoz. Például ha az égen távcsővel vizsgálódunk, távcsövünknek van egy optikai szögfelbontása. Az égen azokat az objektumokat tudjuk megkülönböztetni, amiknek a szög-távolsága nagyobb, mint a távcsövünk felbontóképessége. Egy L-alakú gravitációshullám detektor esetében, mint a LIGO, ez a felbontóképesség nagyságrendileg 90° környékén van [2]. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy az egész égbolt „felbonthatatlan” abból a szempontból, hogy bármely forrás, a detektor és a forrás elhelyezkedésétől függetlenül, jelentősen hozzájárul a detektor kimeneti adatához. Épp ezért, ha „sok” forrás van jelen az égen, még ha pontszerűek is, a kapott jel sztochasztikus természetű lesz [2].

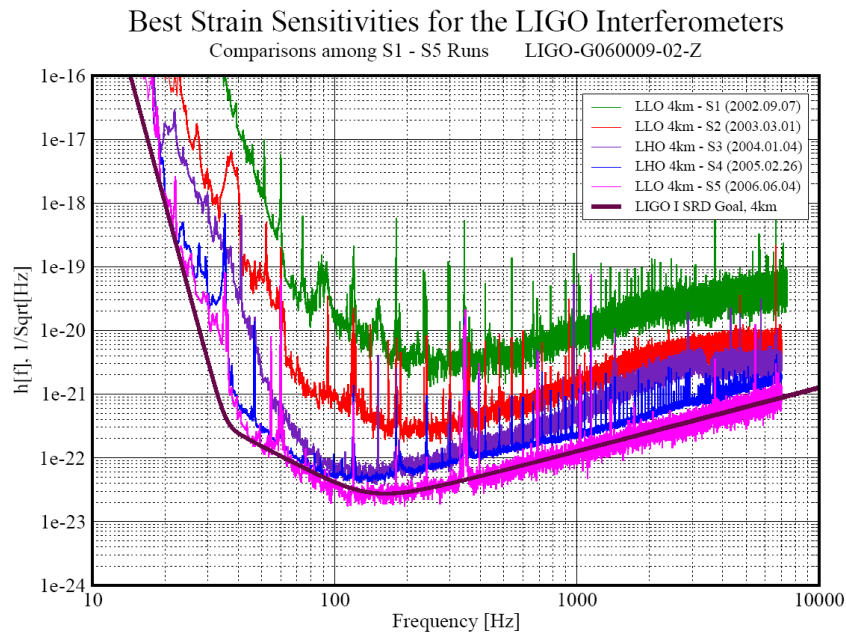
Az SGWB forrásokat emiatt két külön részre bontják, amelyikből nem tudjuk bizonyosan, melyik lesz a jelenősebb a LIGO mérési tartományában. Az egyik a közeli, Tejútrendszeren belüli, nagyszámú források - fehértörpe kettősök, magnetárok [6], forgó neutroncsillagok [7], szupernóvák - felbontatlan jele, a másik a kozmikus eredetű háttérsugárzás, más néven kozmológiai maradványsugárzás.

2. Kozmológiai maradványsugárzás

Asztrofizikai szempontból az érdekesebb forrás a kozmológiai maradványsugárzás, amely az Univerzum korai szakaszaiba enged betekinteni. Különösen fontos ez a maradványsugárzás, mivel a gravitációs hullámok gyengén hatnak kölcsön az anyaggal, így a mérendő háttérsugárzás várhatóan kis mértékben módosult csak a lecsatolódása óta, valamint, mivel a gravitációshullám háttérsugárzás korábbi eredetű, mint az elektromágneses párja. A továbbiakban ezzel a típusú háttérsugárzással foglalkozunk.

¹Összefoglaló a gravitációs hullámokról, detektorokról és forrásokról: [10]

A gravitációs hullám detektálásánál, legyen szó akár háttérsugárzásról, akár pontszerű források jeléről, a legnagyobb problémát a detektor saját zaja jelenti, amely jóval meghaladja az asztrofizikai eredetű jelek nagyságát. Épp ezért fontos a detektorok saját zajának pontos ismerete. Ezt a zajt hagyományosan a teljesítménysűrűség-spektrummal jellemezzük, ami a zaj Fourier amplitúdó-spektruma egyoldali frekvenciaskálán ábrázolva². Az 1. ábrán a LIGO detektorok teljesítményspektruma látható különböző tudományos adatgyűjtési időszakok során. A LIGO és Virgo legalacsonyabb zajszintje, vagyis legérzékenyebb tartománya 100Hz körüli. Az ezen a frekvencián érzékelő gravitációs hullámokat van a legjobb esélyünk kiemelni a háttérzajból.



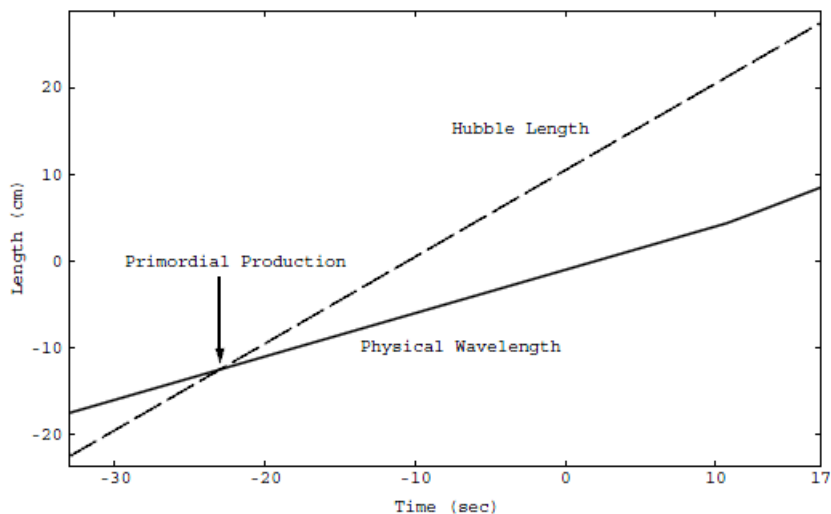
1. ábra: LIGO detektorok zajának teljesítménysűrűség-spektruma log-log skálán a különböző tudományos adatgyűjtési időszakok (Science Run, S1-S5) alatt. Az LLO a livingstoni, LHO pedig a hanfordi LIGO detektor nevének rövidítése. Forrás: bevezető előadás fóliái³

A gravitációs hullám sokban hasonlít az elektromágneses hullámhoz. Egy 100Hz-es elektromágneses hullám keltéséhez elektromágneses töltéseket kell rezgetni 100 Hz-en. Hasonlóan, egy adott frekvenciájú gravitációs hullám keltéséhez „gravitációs töltést”, azaz tömeget kell „rezgetni”. Ebből a szempontból az egész Univerzum „rezgő tömegnek” számít, amiben a tömeg olyan periódusidővel „rezeg”, ami ahhoz kell, hogy a tömeget alkotó anyag és energia átjusson a horizont

²Teljesítményspektrumról bővebben lásd Angler Gábor dolgozatát: http://people.bolyai.elte.hu/~praffai/Dolgozatok/12_AnglerGabor.pdf

³http://bolyai.elte.hu/~praffai/GH_Ora/gravhullam_asztro_praffai_2013.zip

két átellenes pontja között. Mivel a gravitációs hullám kvadrupól sugárzás, a frekvencia kétszeresénél jelenik meg, (ellentétben az elektromágnesessel, amely dipól sugárzás). Nem a horizont két átellenes pontja között megtett út ideje egyezik meg a keletkező hullám periódusidejével, hanem ennek fele. Hosszokban a horizonttávolság egyezik meg a frekvenciához tartozó hullámhosszal. Ennek következtében a mérendő kozmológiai gravitációshullám maradványsugárzás az Univerzum azon korából származik, amikor a horizonttávolság épp a keresett hullámhosszal egyezett meg. A számolás annyival még bonyolódik, hogy a most 100Hz körüli gravitációs hullám az Univerzum tágulása során vöröseltolódáson is keresztülment. Tehát azt az időt keressük, amikor a horizonttávolság és a most 100Hz-es gravitációs hullám akkori hullámhossza megegyezett [2. ábra]. Ez 10^{-22} s körül volt [2]. A LISA ezzel szemben, az eredeti tervek szerint, az Univerzum 10^{-14} s-os korához tartozó SGWB-t érzékelné, amely az elektromágneses fázisátmenet kora, így innen is érdekes információkhoz juthatnánk [2].



2. ábra: Az ábrán két hossz átható az Univerzum életkorának függvényében, log-log skálán. A horizonttávolság, más néven Hubble-távolság (szaggatott vonal) az idővel arányosan változik, ma $\approx 10^{28}$ cm [2]. A ma 100Hz-es gravitációs hullám hullámhossza (folytonos vonal), mely ma 3×10^8 cm körüli, az anyag-dominált (korai) korszakban $t^{2/3}$ -al arányosan, az Univerzum nagyobb idejét kitöltő sugárzás dominált korban pedig $t^{1/2}$ -al arányosan változik [2]. Forrás: [2].

Az SGWB keresésénél feltételezzük, hogy az SGWB izotróp, polarizálatlan, stationárius és Gauss eloszlást követ. Az izotrópiát azért szokás feltenni, mivel a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás (Cosmic Microwave Background, CMB) is nagyfokú izotrópiát mutatott annak ellenére, hogy az utolsó szóródásnál az

Univerzum akkori horizontja - az a terület, ami kizárólag a fényterjedési sebességét véve alapul kauzális kapcsolatban állhatott - ma körülbelül 2° alatt látszik [4]. A legnagyobb CMB anizotrópia az Univerzum nyugalmi rendszeréhez képesti sajátmozgásunkból származik, 10^{-3} nagyságrendű [4]. A következő CMB anizotrópia pedig 10^{-5} nagyságrendű, a lecsatolóidőskori anyageloszlás fluktuációjából származik [4]. Ezek alapján várható, hogy a gravitációs hullám háttérsugárzás is nagyfokú izotrópiát mutat majd, de ez egyáltalán nem biztos. Például, amennyiben a detektált gravitációs háttérsugárzás nem kozmikus eredetű, hanem a közeli - Tejútrendszeren belüli - felbontatlan fehér-törpe ket-tősökből származik, akkor eloszlása is a galaxisunk csillagainak eloszlását fogja követni [2].

A stacionáriuság már biztosabb feltételezés. Esetünkben a stacionaritás azt jelenti, hogy a gravitációs hullám-mező n -pont korrelációs függvényei nem függenek a mérés idejétől, csak a detektálások között eltelt időtől. Gyakorlatilag ez abban merül ki, hogy mikor két (vagy több) detektor által mért adatokat korreláltatunk, azok nem függenek a mérések idejétől (például, hogy most mérjük őket, vagy jövőre), csak a két detektor között a gravitációs hullám által megtett út idejétől. Mivel az SGWB az Univerzum 10^{-22} másodperces korából származik, az SGWB által megtett út ideje az Univerzum életkorával mérhető össze. Az Univerzum életkora (13,7 milliárd év [4]) a gravitációs hullám detektorok által érzékelt hullámok karakterisztikus periódusához képest 20 nagyságrenddel nagyobb [2]. Míg a leghosszabb elképzelhető megfigyelési időhöz képest - azaz ha évekig mérünk - az Univerzum életkora és a mérési idő között 9 nagyságrendnyi eltérés van [2]. Ekkora nagyságrendi eltéréseknél pedig az esetleges időfüggés elhanyagolható.

A gaussi eloszlás alatt azt értjük, hogy az adott detektor által mért SGWB jel normális (Gaussos) eloszlást követ. A Gaussosság feltételezése következik a centrális határeloszlás-tételből, ha figyelembe vesszük, hogy a kozmikus eredetű SGWB az Univerzum 10^{-22} másodperces korából származik, és az akkori horizontméret kb. 10^{39} -szer fér bele a mostani horizontméretbe. A gravitációs hullám ennyi forrás jelének összegeként áll elő, így a gravitációs hullám detektorunk 10^{39} db független - kauzális kapcsolatban nem álló - forrás jelét fogja háttérzajként érzékelni [2].

3. A háttérsugárzás keresése

3.1. Alapelvek

Az SGWB detektálás eltér más jelforrásokétól, mivel első közelítésben elkülöníthetetlen a szintén Gaussos detektorzajtól. Ez nem okozna gondot, ha a detektor zaja elhanyagolható lenne a jelhez képest, de gravitációs hullámok esetében nem ez a helyzet. Éppen ezért egyetlen detektor segítségével nem lehet SGWB-t mérni, szükséges több detektor kimeneti adatsorát használni. Ekkor viszont már lehetőséggé válik elkülöníteni az SGWB jelét a detektorok zajától, mert a detektorok zaja lokális, tehát detektoronként eltér, különösen ha a de-

tektoraink egymástól távol vannak. Ezzel szemben a gravitációs háttérsugárzás globális, hiszen az űrből érkezik, tehát minden detektor azonosnak fogja látni, leszámítva az időeltolódást és a detektorok orientációjából fakadó eltéréseket. Ezen még a gravitációs hullám Földön való áthaladása sem változtat, hiszen a gravitációs hullámok kevéssé hatnak kölcsön az anyaggal, amitől egyrészt a hullám jele kevés módosulással érkezik hozzánk, másrészt éppen ez teszi nehezzé a mérését.

Az SGWB jelének jellemzésére célszerű a dimenziótlan, frekvenciafüggő, relatív energiasűrűséget használni:

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{f}{\rho_c} \frac{d\rho_{GW}}{df}, \quad (1)$$

ahol $d\rho_{GW}$ az f és $f + df$ frekvenciatartományban lévő gravitációs sugárzás energiasűrűsége, és ρ_c az Univerzum kritikus energiasűrűsége [1].

A jelkeresést detektorok adatainak páronkénti keresztkorrelációjával végezzük. A módszernél feltételezzük, hogy a detektorok zaja időben állandó, Gaussos eloszlású, egymástól és az SGWB-től független, illetve az SGWB jelénél jóval nagyobb magnitúdójú [3].

Mint arról feljebb volt szó, a jelkeresés alapötlete, hogy ha van két detektorunk, akkor az SGWB mindkét detektor jelében megjelenik, ezért elkülöníthető. Első közelítésben tételezzük fel, hogy a detektoraink azonos helyen és orientációval helyezkednek el. Ekkor a két detektor által érzékelt gravitációshullám jelek megegyeznek: $h(t) = h_1(t) = h_2(t)$. A detektorok kimeneti adatsora pedig:

$$s_i(t) = h_i(t) + n_i(t), \quad i = 1; 2 \quad (2)$$

ahol $n_1(t)$ és $n_2(t)$ a detektorok zaja [2].

Megfelelő tesztstatisztika ekkor az alábbi mennyiség segítségével kapható:

$$S = \langle s_1, s_2 \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)s_2(t)dt, \quad (3)$$

ahol T a mérés ideje [2]. Ez, lehetőség szerint, minél hosszabb idő; napok, hónapok, évek, akár évtizedek is, de jelenleg a néhány hónapos időtartam a jellemző. Tekintve, hogy s_1 és s_2 értékei is valószínűségi változók, S is az, így rendelkezik átlaggal, μ , és szórással, σ . A tesztstatisztika pedig a jel-zaj arány [3], mely alapján eldönthetjük, hogy történt-e detektálás:

$$SNR = \frac{\mu}{\sigma}. \quad (4)$$

Feltételeztük, hogy a detektorok zaja jóval nagyobb, mint a bejövő jel, ekkor

$$S = \langle h_1, h_2 \rangle + \langle n_1, h_2 \rangle + \langle h_1, n_2 \rangle + \langle n_1, n_2 \rangle \quad (5)$$

$$\approx \langle h_1, h_2 \rangle + \langle n_1, n_2 \rangle \quad (6)$$

A $\langle n_1, h_2 \rangle$ és $\langle n_2, h_1 \rangle$ tagok elhanyagolhatóak $\langle n_1, n_2 \rangle$ -hez képest, mivel a detektorok zaja jóval nagyobb, illetve, mert hasonlóak, hiszen mindegyik

jel egymástól független, Gaussos statisztikájú valószínűségi változó [2]. S tehát egy „jel” és egy „zaj” tag összege, így azt várjuk, hogy a jel-zaj arány

$$SNR \propto \frac{\langle h_1, h_2 \rangle}{\langle n_1, n_2 \rangle} \quad (7)$$

legyen [2].

Matematikailag korrektebb felíráshoz használjuk S definícióját, (3), és a (2) egyenletet. Kihhasználva a megfelelő tagok páronkénti függetlenségét, illetve egyenlőségét:

$$\mu = \langle S \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} dt \langle h^2(t) \rangle = T\sigma_h^2, \quad (8)$$

ahol σ_h a beérkező gaussi SGWB jel szórása [3].

A további számoláshoz szükséges a $\sigma_h^2 = \langle h_1(t), h_2(t) \rangle$ várható érték:

$$\langle h_1(f), h_2(f') \rangle = \frac{3H_0^2}{20\pi^2} \delta(f - f') |f|^{-3} \Omega_{GW}(|f|). \quad (9)$$

ahol $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ a Hubble paraméter [3]. Az egyenletben megjelenő $|f|$ abszolútérték a számolás közben szükséges egyoldali Fourier transzformáció következtében jelenik meg, amelyek a gravitációshullám jelre feltett statisztikai tulajdonságok következménye. A frekvenciatérben kapott eredményt a $h_i(t)$ jel síkhullám felbontását⁴, valamint a gravitációs hullámok energiasűrűségét⁵ használva lehet megkapni. Bővebben lásd Allen és Romano 1999-es hivatkozott cikkének II/C fejezetét [3].

(9)-t beírva (8)-be, áttérve frekvenciatérbe és elvégezve f' -re az integrálást [3]:

$$\mu = \frac{3H_0^2}{20\pi^2} T \int_{-\infty}^{\infty} df |f|^{-3} \Omega_{GW}(|f|). \quad (10)$$

S szórásának számításánál élhetünk a következő közelítéssel:

$$\sigma^2 = \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2 \approx \langle S^2 \rangle, \quad (11)$$

hiszen a detektor zaja jóval meghaladja a gravitációshullám jelét [3].

Behelyettesítve (3)-t és (2)-t, valamint elhagyva az SGWB jelét [3]:

$$\sigma^2 \approx \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' \langle n_1(t), n_1(t') \rangle \langle n_2(t), n_2(t') \rangle. \quad (12)$$

Há $P_i(|f|)$ a detektorok zajának egyoldali teljesítményspektruma, akkor definíció szerint (egyoldalú spektrum használatával) [3]:

⁴[3]-as hivatkozás (2.5) egyenlete

⁵Lásd például: C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler, Gravitation, (W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973). 995. old.

$$\langle n_i^2(t) \rangle = \int_0^\infty df P_i(f) \quad (13)$$

Behelyettesítve (13)-et (12)-be, és elvégezve az integrálást t -re és t' -re [3]:

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty df \int_{-\infty}^\infty df' \delta_T^2(f - f') P_1(|f|) P_2(|f|) \quad (14)$$

ahol

$$\delta_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi ft} dt = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi T} \quad (15)$$

$\delta_T(f)$ a Dirac-delta függvény véges approximációja. A $T \rightarrow \infty$ limitben Dirac-deltához tart, de véges T -re $\delta_t(0) = T$ [3]. A gyakorlatban a T megfigyelési idő elég nagy ahhoz, hogy a $f \approx \frac{1}{T}$ tartomány - amelyen $\delta_t(f - f')$ egy hegyes csúccsal közelíthető - elhanyagolhatóan kicsi legyen a $P_i(|f|)$ teljesítményspektrumok értelmezési tartományához képest. Ezért az egyik $\delta_t(f - f')$ egy Dirac-delta függvénnyel közelíthető, míg a másikonál $f = f'$ közelítés alkalmazható [3]. Ezt megtéve:

$$\sigma^2 \approx \frac{T}{4} \int_{-\infty}^\infty df P_1(f) P_2(f) \quad (16)$$

közeliítő eredményt kapjuk [3]. A kapott jel-zaj arány tehát:

$$SNR = \frac{\mu}{\sigma} \approx \frac{3H_0^2}{10\pi^2} \sqrt{T} \frac{\int df |f|^{-3} \Omega_{gw}(|f|)}{[\int df P_1(|f|) P_2(|f|)]^{1/2}} \quad (17)$$

Összességét tekintve tehát a jel-rész T -vel, a zaj pedig \sqrt{T} -vel arányos, tehát a jel-zaj arány is \sqrt{T} -vel arányos. Következésképpen, még ha a detektorzaj jócskán meghaladja a háttér jelének nagyságát, hosszú integrálási idővel az SGWB kimutathatóvá válik [2].

3.2. Az átfedési függvény

A valóságban a detektoraink nincsenek azonos helyen, és nem azonos állásúak, ezért szükséges bevezetni egy $\gamma(f)$ átfedési függvényt (overlap reduction function). Ez a frekvencia egy dimenziótlan függvénye, mely teljes mértékben a detektorok relatív helyzetétől függ. A függvény konstans 1, ha a detektorok azonos helyen vannak és azonos állásúak, egyéb esetben -1 és 1 közötti értéket vesz fel. A Flanagan által 1993-ban definiált függvény (lásd: [5]):

$$\gamma(f) = \frac{5}{8\pi} \int_{S^2} d\hat{\Omega} e^{2\pi i f \hat{\Omega} \Delta \vec{x}/c} (F_1^+ F_2^+ + F_1^\times F_2^\times), \quad (18)$$

ahol $\hat{\Omega}$ az S^2 egységnyi sugarú körön futó vektor, $\Delta \vec{x}$ két detektort összekötő irányba mutató egységvektor, és $F_i^{+, \times}$ a detektorok + és \times irányra vonatkozó antennafaktorai⁶.

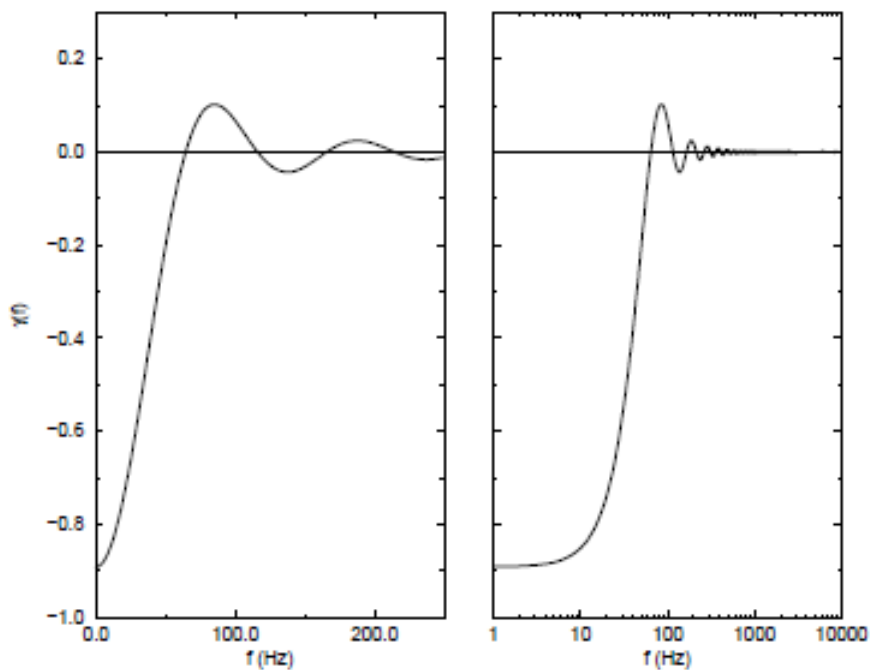
⁶Antennafaktorokról bővebben például itt:

Nem nehéz belátni hogyan jön ez a függvény. $\gamma(f)$ -nek arányosnak kell lennie a különböző detektorok által érzékel gravitációshullám jellel, illetve, mivel detektorpárról van szó, a jelek kiátlagolt szorzatával. Tekintve, hogy izotróp, polarizálatlan háttérsugárzás éri a detektorokat, adott f frekvencián a kiátlagolás az antennafaktorok segítségével történik: $F_1^+ F_2^+ + F_1^\times F_2^\times$. Mivel ez a sugárzás izotróp módon, minden irányból érkezik, szükséges az egész térre integrálni [2].

Az átfedési függvény pontos alakja a keresésnél kevésbé fontos, mivel kifejezhető három Bessel-függvény összegeként [5]:

$$\gamma(f) = A j_0(\epsilon) + B \frac{j_1(\epsilon)}{\epsilon} + C \frac{j_2(\epsilon)}{\epsilon^2} \quad (19)$$

ahol $\epsilon = 2\pi f |\Delta \vec{x}|/c$, és A, B, C konstansok, melyek csak a detektorpár két detektorának egymáshoz képesti helyzetétől és orientációjától függnnek. Például a két LIGO detektor esetében $A = -0.124842, B = -2.90014, C = 3.00837$ [2]⁷.



3. ábra: Hanfordi és livingstoni LIGO detektorok átfedési függvénye frekvencia függvényében lineáris (balra) és logaritmikus (jobbra) x-tengellyel. (Forrás:[2])

<http://www.astro.gla.ac.uk/users/mikelb/log/200904/20090401/formulae.pdf>

⁷Az A, B, C konstansok számolásáról bővebb információk Flanagan cikkében [5] találhatóak.

Az 3. ábrán a hanfordi és livingstoni LIGO detektorok átfedési függvénye látható lineáris és logaritmikus frekvenciaskálán. Észrevehetjük, hogy az átfedési függvény negatív ahogy $f \rightarrow \infty$. Ez amiatt van, hogy a detektorok nem párhuzamosak, hanem egymáshoz 90° -kal el vannak forgatva. $\gamma(0)$ sem 1 abszolútértékben, mivel a két detektor nem azonos helyen van [3].

3.3. Szűrőfüggvény

Most már eljutottunk oda, hogy definiálhatjuk az (3) egyenlet S mennyiségének általános alakját is:

$$S = \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' s_1(t) s_2(t') Q(t - t'), \quad (20)$$

ahol $Q(t - t')$ egy szűrő függvény [2]. Célunk az optimális szűrőfüggvény megtalálása.

Mivel feltettük, hogy a háttérsugárzásunk, valamint a detektorzajok stacionáriusak, ezért a szűrőfüggvény $Q(t, t')$ csak a $\Delta t = t - t'$ időkülönbségtől függ. Az optimális függvény továbbá függeni fog a detektorok egymáshoz viszonyított helyétől és orientációjától, valamint az SGWB és a detektorok zajának spektrumától. Ha a detektorok nem azonos helyen és orientációval állnak, akkor nem a Dirac-delta függvény lesz az ideális választás, mint (3) esetén. Ennek ellenére, mint az a 4. ábrán látható, $Q(t - t')$ ekkor is gyorsan fog 0-hoz tartani olyan Δt értékekre, melyek meghaladják a detektorok helye közötti fényút d/c idejét⁸ [3]. Tekintve, hogy a megfigyelési idő $T \gg d/c$, az integrál kiterjeszthető [3]:

$$S = \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' s_1(t) s_2(t') Q(t - t'). \quad (21)$$

Fourier transzformáció segítségével áttérve frekvenciatérbe:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta_T(f - f') \tilde{s}_1^*(f) \tilde{s}_2(f') \tilde{Q}(f'). \quad (22)$$

ahol $\delta_T(f - f')$ a Dirac-delta függvény véges approximációja (lásd (15)), illetve $\tilde{g}(f)$ a megfelelő $g(t)$ függvény Fourier transzformáltja, g^* -gal pedig a komplex konjugáltat jelöljük [3]:

$$\tilde{g}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} g(t) dt \quad (23)$$

Az optimalizáláshoz szükséges egy extrémizálható mennyiség, esetünkben ez az (4)-ben definiált jel-zaj arány, melynek a maximumát keressük. Ehhez ismét szükséges S átlaga, μ , és szórása, σ .

Az átlag most is könnyen felírható, csupán most már a két jeltag, $h_1(t)$ és $h_2(t)$ nem azonosak. Frekvenciatérben:

⁸Ez annak köszönhető, hogy $\tilde{Q}(f) \propto \gamma(f)$, lásd (33)

$$\mu = \langle S \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta_T(f - f') \langle \tilde{h}_1^*(f) \tilde{h}_2(f') \rangle \tilde{Q}(f') \quad (24)$$

(9)-t használva, hasonlóan számolva mint (10) esetén [3]:

$$\mu = \frac{3H_0^2}{20\pi^2} T \int_{-\infty}^{\infty} df |f|^{-3} \Omega_{gw}(|f|) \gamma(|f|) \tilde{Q}(f) \quad (25)$$

A T faktor $\delta_T(0)$ -ból jön (lásd (15) utáni diszkusszió). Az eredmény hasonló, mint amikor a két detektor azonos helyen és orientációval áll, csak most megjelent az átfedési függvény is [3].

Idő-térben felírva a jelek keresztkorrelációját, (9)-t [3]:

$$\langle \tilde{h}_1^*(t) \tilde{h}_2(t') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} df e^{i2\pi f(t-t')} H_{12}(f) \quad (26)$$

ahol

$$H_{12}(f) = \frac{3H_0^2}{20\pi^2} |f|^{-3} \Omega_{gw}(|f|) \gamma(|f|) \quad (27)$$

Érdeemes megjegyezni, hogy a zajok egymástól és a háttérsugárzás jelétől való függetlensége következtében

$$\langle \tilde{h}_1^*(t) \tilde{h}_2(t') \rangle \approx \langle \tilde{s}_1^*(t) \tilde{s}_2(t') \rangle \quad (28)$$

Ezt a keresztkorrelációt viszont mérni tudjuk. Ebből következik, hogy $H_{12}(f)$ -t, ami a keresztkorreláció Fourier transzformáltja, is mérni tudjuk. Következésképpen meg tudjuk mérni $\Omega_{gw}(|f|)$ -t, vagy legalábbis, kellő információ birtokában becslést adhatunk rá. Így, ha a detektorok zaja nem túl nagy, vagy kellően hosszú megfigyelési idő áll rendelkezésünkre, akkor közelítést adhatunk az SGWB spektrumára. Ez a közelítés a legjobb az $1/T < f < c/d$ tartományban lesz, mivel $f < 1/T$ esetén a véges Fourier transzformációhoz nincs elég jó felbontásunk, $f > c/d$ esetén pedig a $\gamma(f)$ átfedési függvény (amivel osztani kell $\Omega_{gw}(f)$ előállításához,) $\gamma(f)$, tart erősen 0-hoz [3].

Visszatérve a jel-zaj arányhoz: a szórás kiszámításához ismét feltesszük, hogy a háttérsugárzás jele jóval kisebb magnitúdójú, mint a detektorzajok, tehát a kimenő adatsor szórását ismét a detektorzajok szórása határozza meg. A (12) egyenlet alakja általános most [3]:

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta_T^2(f - f') P_1(|f|) P_2(|f|) \tilde{Q}(f) \tilde{Q}^*(f') \quad (29)$$

Hasonlóan, mint (16) esetén, az egyik $\delta_T(f - f')$ -t egy egyszerű Dirac-delta függvénnyel közelítve, a másiknál pedig $f = f'$ -t behelyettesítve, és elvégezve az integrált [3]:

$$\sigma^2 \approx \frac{T}{4} \int_{-\infty}^{\infty} df P_1(|f|) P_2(|f|) |\tilde{Q}|^2 \quad (30)$$

A feladat most már csak megtalálni a megfelelő $\tilde{Q}(f)$ szűrő függvényt, ami maximalizálja a jel-zaj arányt, vagy a jel-zaj arány négyzetét. A probléma egy egyszerű geometriai kérdésre vezethető vissza a megfelelő skalárszorzat definiálásával:

$$(A, B) = \int_{-\infty}^{\infty} df A^*(f) B(f) P_1(|f|) P_2(|f|) \quad (31)$$

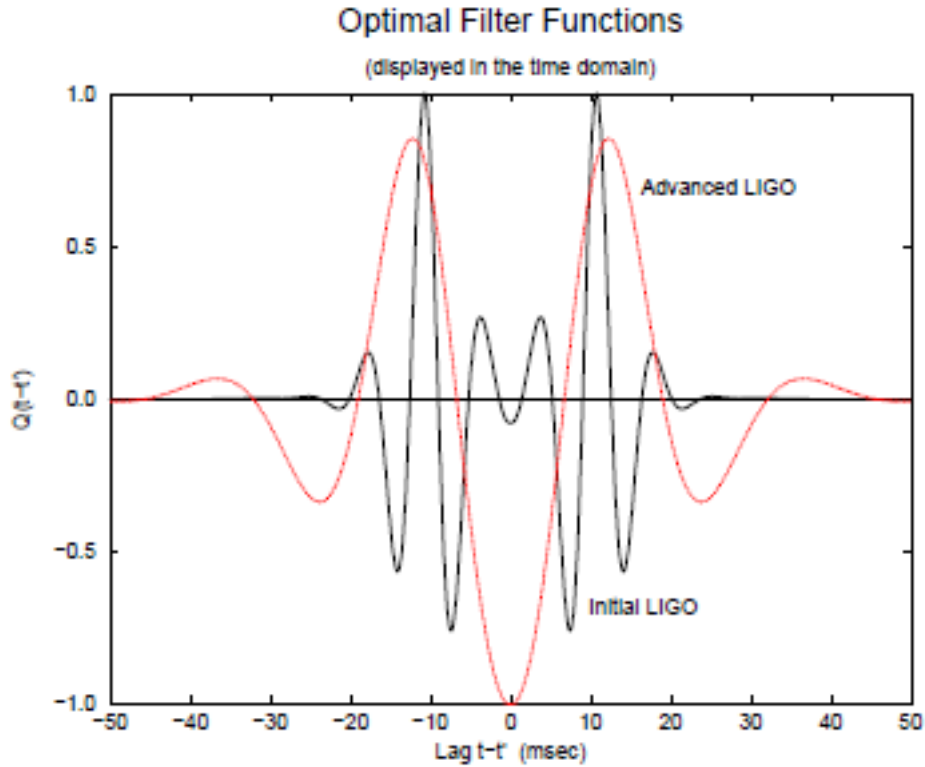
(31)-ről könnyen ellenőrizhető, hogy egy pozitív-definit skalárszorzat (lásd: [3]), és hogy ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, mint az Euklideszi 3-dimenziós vektorok skalárszorzata. Ekkor μ átlag, és σ szórás átírása után a jel-zaj arány [3]:

$$SNR^2 \approx \left(\frac{3H_0^2}{10\pi^2} \right) T \frac{\left(\tilde{Q}, \frac{\gamma(|f|)\Omega_{gw}(|f|)}{|f|^3 P_1(|f|) P_2(|f|)} \right)^2}{(\tilde{Q}, \tilde{Q})} \quad (32)$$

Ez viszont, az Euklideszi párhuzamból, akkor maximális, ha a vektorok „párhuzamosak” [3], azaz az optimális függvény:

$$\tilde{Q}(f) = \lambda \frac{\gamma(|f|)\Omega_{gw}(|f|)}{|f|^3 P_1(|f|) P_2(|f|)} \quad (33)$$

ahol λ (valós) konstans, a normálási faktor [3].



4. ábra: LIGO és Advanced LIGO detektorpárok szűrőfüggvénye időtérben $\Omega_\alpha = \Omega_0$ frekvenciafüggetlen SGWB-t feltételezve. A függvények szélsőértéke abszolútértékben 1-re normált. Eltérések ez eltérő teljesítményspektrumból adódnak. Az Advanced LIGO zajának teljesítményfüggvénye kisebb magnitúdójú, illetve a korszerűbb detektor kicsit alacsonyabb frekvenciákon érzékenyebb [2]. Forrás: [3]

A probléma az optimális szűrővel, hogy tartalmazza az $\Omega_{gw}(|f|)$ spektrumot, ami nem ismert előre. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy nem egy, hanem több szűrőt kell használnunk. Az általánosan elterjedt módszer, hogy feltételezzük a spektrum hatványfüggvény-szerű viselkedését: $\Omega_{gw}(f) = \Omega_\alpha f^\alpha$, ahol Ω_α konstans. Ekkor készíthetünk szűrőfüggvényeket az α paraméter adott értékeire a λ_α normalizációs faktort úgy választva, hogy $\mu = \Omega_\alpha T$ teljesüljön. (A számolást tipikusan $\alpha + 4$ és -4 közötti egész és fél-egész értékekre végzik el.) Ekkor:

$$\Omega_{gw}(f) = \frac{\mu}{T} f^\alpha \quad (34)$$

Ez azért jó, mert a szűrőfüggvény alakja csupán egyetlen paramétertől, α -tól, fog függni [3]. A 4. ábrán például egy frekvencia-független ($\alpha = 0$) szűrőfüggvény látható a LIGO detektorpárokra.

4. Detektálás

A detektálás az SGWB esetében is hasonlóan történik, mint ismert hullámformájú jelek keresésénél, annyiban, hogy az adatgyűjtés és tisztítás után ki kell fejteni az adatokat egy választott bázis szerint, majd tesztstatiszтика kidolgozása és mérése segítségével kerül eldöntésre, hogy történt-e detektálás.

Esetünkben az adat a detektorkimenetek, illetve a választott α hatványkitevővel, az (21) alapján keresztkorreláltatott S mennyiség. Érdemes az adatot néhány másodperces darabokra vágni, és úgy elvégezni a Fourier transzformációt, így n darab független Gaussos eloszlású detektorkimenetet kapunk. Ez annak köszönhető, hogy ha a darabok néhány másodpercesek, például $T \approx 4s$, akkor a keresztkorrelált S mennyiségünk valójában néhány száz, statisztikailag független valószínűségi változó összege. Korreláció ilyenkor a különböző frekvenciájú adatok között csak akkor van, ha a frekvenciakülönbség $\frac{1}{T} \approx 0.25\text{Hz}$ -nél kisebb [3]. Ekkor már nem érvényesek a (16), (21), és (30) egyenleteknél használt közelítések.

Legyen tehát a feldarabolt mérési adatunk $s = (S_1, \dots, S_n)$ n db statisztikailag független, T időintervallumú mérésünk. Tekinthejük ezeket úgy, mint n db mintája egy μ átlagú, és σ^2 szórású normál eloszlású valószínűségi változónak. Ekkor a mintánknak is van átlaga[3]:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i \quad (35)$$

és szórása [3]:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (S_i - \hat{\mu})^2 \quad (36)$$

Ezek ismeretében szeretnénk eldönteni, hogy detektáltunk-e gravitációs hullámot. Azaz el szeretnénk dönteni, hogy a két hipotézis közül melyik teljesül:

H_0 : Nincsen jelen az adatokban SGWB.

H_1 : Jelen van az adatokban egy SGWB jel, amit egy ismeretlen karakterisztikus $\mu > 0$ átlagérték jellemez.

Erre a kérdésre a statisztika ad választ. Tipikusan az egymintás t-próbát⁹ tervezték ennek a kérdésnek a megválaszolására. Az egymintás t-próbával viszont az a probléma, hogy van egy paraméterfüggősége, így minden eredmény függni fog a választott n minta nagyságától. A probléma kiküszöbölhető, ha kellően nagy n -t választunk, mivel ekkor a t-eloszlás a standard normál eloszláshoz tart. Mivel az SGWB mérések tipikusan néhány hónaposak, ha T néhány másodperces, akkor $n \cdot 10^3$ vagy még nagyobb. Tehát a próbastatisztikánk:

$$z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \quad (37)$$

⁹Egymintás t-próbáról bővebben például: [9] 178. oldal vagy https://en.wikipedia.org/wiki/Student's_t-test

ahol z egy standard normál eloszlású valószínűségi változó, azaz gaussi valószínűségi változó 0 átlaggal és 1 szórással [3].

Fontos megjegyezni, hogy hipotéziseink kölcsönösen kizárólagosak és teljesek. Ez azt jelenti, hogy egyszerre vagy az egyik teljesül, vagy a másik, de valamelyik mindig igaz. Továbbá (34) miatt $\Omega_{gw}(f) \propto \mu$, $\alpha = 0$ esetén [3].

Most már lehetséges a következő két valószínűség definiálása:

$p(s|0)$: Annak a valószínűsége, hogy a mérésünk eredménye $s = (S_1, \dots, S_n)$, ha H_0 igaz.

$p(s|\mu)$: Annak a valószínűsége, hogy mérésünk eredménye s , ha H_1 teljesül μ karakterisztikus átlagértékkel.

(37) alapján [3]:

$$p(s|0) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{S_i^2}{2\hat{\sigma}^2}\right) \quad (38)$$

$$p(s|\mu) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(S_i - \mu)^2}{2\hat{\sigma}^2}\right) \quad (39)$$

Ekkor definiálható a hamis riasztási gyakoriság:

$$\rho = \int_{R_1} p(s|0) ds, \quad (40)$$

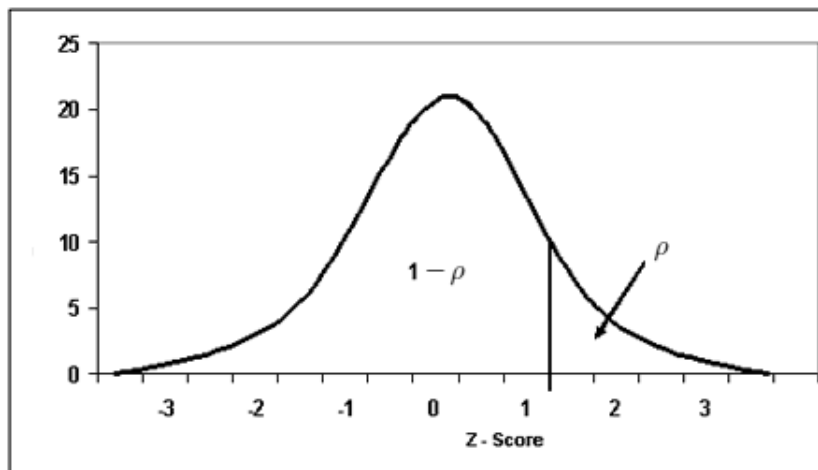
illetve a hamis elvetési gyakoriság

$$\phi(\mu) = \int_{R_0} p(s|\mu) ds \quad (41)$$

ahol R_0 és R_1 két diszjunkt tartomány: $s \in R_i$ ha H_i teljesül¹⁰ [3]. Célunk tehát, hogy optimális R_i tartományokat válasszunk. Mivel SGWB jeleknél nem tudunk sokat a hamis riasztásokról, érdemes úgy optimalizálni, hogy a ϕ hamis elvetési rátát minimalizáljuk a ρ hamis riasztási gyakoriság fixen tartása mellett. Ezt a szakirodalom Neyman-Pearson kritériumként ismeri [3]. Esetünkben a számolás sokat egyszerűsödik, mivel az egyik esemény, H_0 , azaz, hogy nem mértünk gravitációs hullámot, nem függ μ paramétertől. Az optimális választás esetünkben: H_0 ha $\mu < z_\rho\sigma/\sqrt{n}$, és H_1 , ha $\mu \geq z_\rho\sigma/\sqrt{n}$, ahol z_ρ a standard normál eloszlás azon értéke, amelytől jobbra a függvény alatti terület értéke ρ [5.ábra]. Ez átírható a már ismert jel-zaj aránnyal: akkor nincs detektálás, ha [3]

$$\sqrt{n} \widehat{SNR} = \sqrt{n} \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} < z_\rho \quad (42)$$

¹⁰Az előadások során megismert hamis riasztási és elvetési gyakoriságok azonosak az itt definiáltakkal, csupán az előadáson az R_i tartományok 1 dimenziósak voltak, ezért egyetlen számmal jellemezhetővé váltak. Ez a szám azonos azzal a közbértékkel amely alapján eldöntjük, hogy történt-e detektálás.



5. ábra: Standard normál eloszlás. z_ρ a valószínűségi változó azon értéke, amitől jobbra a függvény alatti terület ρ .

5. Eddigi eredmények

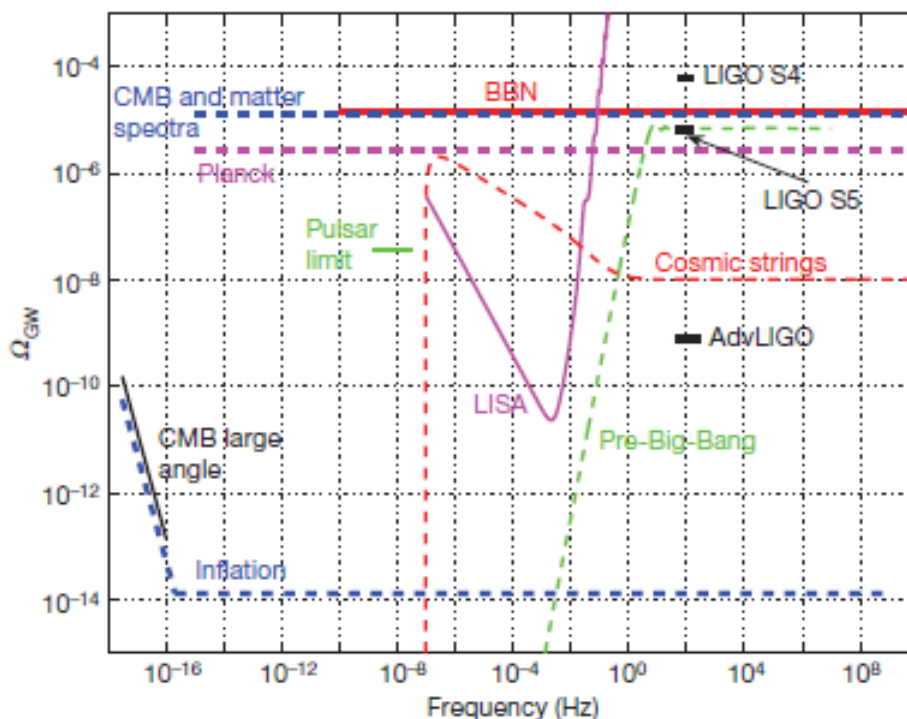
A LIGO S5 futása után sem találtak SGWB jelet az adatokban, ami újabb, minden eddiginél alacsonyabb felső korlátot jelent a háttérsugárzás amplitúdójára, és egyszersmind korlátozó tényező a kozmológiai modellek paraméterterére [1].

A LIGO hanfordi és livingstoni 4 km-es, valamint a hanfordi 2km-es és livingstoni detektorok S5 futásából származó adatok páronkénti keresztkorrelál-tatása az eddig ismertetett módszerrel történt. Hatványszerű frekvenciafüggésű gravitációs háttérsugárzást feltételezve, a 41,5-169,25 Hz tartományban a frekvenciafüggetlen gravitációs hullám spektrumra $\Omega_0 = (2.1 \pm 2.7) \times 10^{-6}$, ahol a hiba statisztikai [1]. A Bayes-i 95%-os konfidencia intervallum¹¹ $\Omega_0 < 6.9 \times 10^{-6}$ -t ad, míg az α index -3 és 3 közötti értékei esetén a felső korlát 1.9×10^{-6} és 7.1×10^{-6} között mozog[1].

A gravitációshullám-detektorok előtt a kozmológiában csupán a CMB méréseire lehetett elméleteket alapozni. E miatt jelenleg sok kozmológiai elmélet létezik, széles paraméterskálákkal. Viszont a különböző kozmológiai elméletek, és maga a CMB mérés is korlátokat adnak a gravitációs háttérsugárzás energiasűrűségére. A Big-Bang-Nukleoszintézis (BBN) például $\Omega_0^{BBN} < 1.1 \times 10^{-5}$ korlátot ad. Ez onnan származik, hogy ismert a mai elemgyakoriság, amiből (és más paramétereiből, mint az egyes folyamatok hatáskeresztmetszete) következtethetünk a BBN során keletkezett elemek egymáshoz viszonyított arányára. Nagy gravitációshullám-energiasűrűségek megváltoztatták volna a folyamatok hatáskeresztmetszetét, és ezzel a létrejött elemgyakoriságot [1]. Hasonlóan a WMAP mérései a CMB-ra eltértek volna, ha túl erős gravitációshullám-tér is jelen van a lecsatolódkor. Ez alapján $\Omega_0^{CMB} < 9.5 \times 10^{-6}$ [1]. A 6. ábrán

¹¹Konfidencia intervallumokról bővebben például: [8]

ilyen korlátok láthatóak különböző modellek, mérési eredmények és még meg nem épült detektorok tervezett zaja alapján.



6. ábra: Eltérő SGWB mérések és modellek felső korlátai a gravitációshullám energiasűrűségére. A LIGO eredmények csupán a 41,5-169,25 Hz frekvenciatartományra érvényesek. Forrás: [1]

Hivatkozások

- [1] LSC & VC, Nature 460, p. 990-994, 2009
- [2] Allen, B. The stochastic gravity-wave background: sources and detection. Preprint at <http://arXiv.org/abs/grqc/9604033>. (1996).
- [3] Allen, B. & Romano, J. Detecting a stochastic background of gravitational radiation: signal processing strategies and sensitivities. Phys. Rev. D 59, 102001 (1999).
- [4] Advanced information on the Nobel Prize in Physics 2006 Cosmology and the Cosmic Microwave Background. (2006) http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2006/advanced-physicsprize2006.pdf

- [5] E. Flanagan, *Phys. Rev. D* **48**, 2389 (1993).
- [6] Regimbau, T. & de Freitas Pacheco, J. A. Gravitational wave background from magnetars. *Astron. Astrophys.* **447**, 1–8 (2006).
- [7] Regimbau, T. & de Freitas Pacheco, J. A. Cosmic background of gravitational waves from rotating neutron stars. *Astron. Astrophys.* **376**, 381–385 (2001).
- [8] Zech, G. Frequentist and Bayesian Confidence Intervals. Preprint at: <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0106023>
- [9] I. Miller and J.E. Freund, *Probability and Statistics for Engineers*, (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1985).
- [10] Hughes, Scott A.; Marka, Szabolcs; Bender, Peter L.; Hogan, Craig J., New physics and astronomy with the new gravitational-wave observatories, eprint arXiv:astro-ph/0110349 (2001)