

A teljesítményspektrum és becslési módszerei

Angler Gábor

1. A teljesítmény- és amplitúdóspektrum

1.1. Az autokorrelációs függvény

Ismert, hogy a jelfeldolgozásban, különösen idősorok elemzésénél gyakran alkalmaznak korrelációs függvényeket adatsorozatok összehasonlításában. A keresztkorreláció segít két adatsor közötti összefüggés megtalálásában. Ha az egyik adatsort eltoljuk, akkor késleltetett hatások is felfedezhetők. Az autokorrelációval periódusok mutathatók ki az adatsorban. Kézenfekvő definiálnunk két függvény (esetünkben diszkrét, véges adatsor, vagy idősor) keresztkorrelációját és ez alapján konvolúcióját, továbbá egy függvény autokorrelációját. Láttuk, hogy a konvolúció lényegében egy időtükrözött függvénnyel vett keresztkorrelációnak felel meg és az autokorreláció egy adatsornak saját magával vett keresztkorrelációjával egyenértékű. A következőkben elsősorban az autokorrelációs függvénnyel foglalkozunk, ezért emlékeztetőül közöljük a definícióját. Általános esetben tekintsünk egy $f(t)$ folytonos függvényt, így az autokorrelációs függvénye:

$$R_{ff}(\tau) = (f(t) * \bar{f}(-t))(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau) \cdot \bar{f}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \bar{f}(t - \tau) dt \quad (1)$$

ahol τ az időeltolásnak felel meg, a $*$ a konvolúciót és \bar{f} pedig az f függvény komplex konjugáltját jelöli. Valós $f(t)$ függvényekre a következő alakra egyszerűsödik a fenti képlet:

$$R_{ff}(\tau) = (f(t) * f(t))(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot f(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot f(t - \tau) dt, \quad (2)$$

ahol a \star szimbólum a korrelációt jelöli. Egy elterjedt, a fentiekkel ekvivalens kompakt jelölésmód a következő:

$$r_f(\tau) = f \star f = \langle f(t)f(t - \tau) \rangle. \quad (3)$$

Diszkrét esetben tekintsünk egy $s[n]$ folytonos, valós értékű adatsort, így az autokorrelációs függvény:

$$R_{ss}(j) = (s[n] \star s[n])(j) = \sum_n s[n]s[n - j], \quad (4)$$

ahol j a diszkrét időeltolásoknak felel meg. Röviden tekintsük át az autokorrelációs függvény legfontosabb sajátosságait!

- $\tau = 0$ helyen (zérus időeltolásnál) van a maximuma.
- Periodikus függvényeknél lokális maximumokat találunk rendre a periódusidő egész számú többszöröseinek megfelelő τ időeltolásoknál, ezért, mint azt korábban láttuk, periodicitás mutatható ki alkalmazásával a vizsgált adatsorban.
- Az $s \star s$ „szélessége” a maximuma körül jelzi, hogy milyen gyorsan változik a függvény („változékonyság”).
- Ha a vizsgált $s(t)$ idősor első momentuma zérus („fehér zaj”), azaz $\mu(s(t)) = 0$, akkor az ún. zérus késleltetésű autokorrelációs függvény (*zero lag autocorrelation function*) jellemzi az adatsor σ varianciáját (gyakorlatilag a zaj mértékét), azaz:

$$(s \star s)(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)dt = \sigma^2. \quad (5)$$

- Megjegyezzük, hogy ehhez hasonlóan valójában a Fourier-transzformáció is egy tetszőleges $x(t)$ idősor hasonlóságát adja meg egy választott periodikus függvényhez képest (matematikailag egy speciális projekció önkényes, célszerűen megválasztott bázisfüggvényre):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt. \quad (6)$$

Most a konvencionális normálási faktortól eltekintettünk.

- Hasonlóan a konvolúció műveletéhez, az autokorreláció a Fourier-térben szorzással redukálódik. Az összefüggés valós értékű adatsor esetén tovább egyszerűsödik (a \star szimbólum most a komplex konjugálást jelöli):

$$\mathcal{F}(s \star s) = \mathcal{F}(s)^* \cdot \mathcal{F}(s) = |\mathcal{F}(s)|^2. \quad (7)$$

1.2. A teljesítménysűrűség-spektrum (PSD)

Ha egy tetszőleges $s(t)$ időjel autokorrelációs függvénye $r_s(\tau) = \langle s(t)s(t-\tau) \rangle$, akkor ez utóbbi mennyiség Fourier-transzformáltja lesz az ún. teljesítménysűrűség-spektrum (*Power Spectral Density*, PSD), vagy néha az egyszerűség kedvéért – tévesen – teljesítményspektrumnak is nevezik:

$$P_s(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (s \star s)(\tau) \cdot e^{-i2\pi f\tau} d\tau. \quad (8)$$

Egy másik normálási faktor konvenció szerint:

$$P_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_s(\tau) \cdot e^{-i2\pi f\tau} d\tau. \quad (9)$$

A fenti definíciós képletekkel egyenértékű megfogalmazás, hogy a Fourier amplitúdóspektrum abszolútérték négyzetével egyenlő a teljesítményspektrum (lásd a 7. egyenletet). Ez az ekvivalencia azonban akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathcal{F}(s)$ létezik. A létezés szükséges feltétele, hogy az $s(t)$ valós értékű függvény négyzetesen integrálható legyen, azaz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < +\infty. \quad (10)$$

Megjegyezzük, hogy ez a feltétel valós, diszkrét esetben mindig teljesül. A Wiener-Khinchin tétel a fentieket tovább általánosítja: ha az $s(t)$ tágabb értelemben vett stationárius zaj (olyan jelek, amelyek Fourier-transzformáltja nem létezik), akkor az autokorrelációs függvény Fourier-transzformáltja a teljesítménysűrűség-spektrummal (PSD) egyenértékű. Megjegyezzük, hogy a teljesítményspektrum a következőképpen adható meg:

$$G(f) = \int_{-\infty}^f P_s(f') df', \quad (11)$$

ahol az f egy választott frekvenciaérték. Továbbá megjegyezzük, hogy a fenti definíciónak megfelelő teljesítményspektrumot a gravitációshullám-detektorokból származó adatok analízisében ritkábban használják, mint a teljesítményspektrum-sűrűséget (PSD).

Ismert, hogy egy időjel amplitúdóspektrumának értelmezési tartománya általános esetben a negatív frekvenciákra is kiterjed; mint ahogy az is, hogy a negatív frekvenciáknál rögzített adatoknak nincs információtartalmuk (ugyanis ugyanazon adatsor jelenik meg kétszer). Ezen sajátosság miatt általános esetben a spektrumot kétoldalasnak (vagy kétoldalinak) nevezhetjük. Ugyanakkor fontos definiálnunk a teljesítménysűrűség-spektrum ún. egyoldalas formáját, mivel a gravitációshullám-asztrofizika területén *ennek* egy szár-

maztatott mennyiségét használják konvencionálisan az interferometrikus detektorok érzékenységének jellemzésére (ellentétben a kétoldalas változattal). Tehát az egyoldalas (vagy egyoldali) teljesítményspektrum:

$$S_s(f) = s^2(f) = \begin{cases} 2P_s(f), & \text{ha } f \geq 0 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (12)$$

Belátható, hogy az amplitúdóspektruma jól jellemez egy véletlen, sztochasztikus folyamatot, ellenben a fázisspektruma nem (az teljesen random, $\mu(\mathcal{F}(s)) = 0$). Ezért legtöbbször az adatfeldolgozás során a fázisspektrumnak nincs információtartalma, csak a spektrális információkat (amplitúdóértékeket) vizsgáljuk a továbbiakban.

1.3. Az amplitúdósűrűség-spektrum (ASD)

Definíció szerint az ún. amplitúdósűrűség-spektrum (*Amplitude Spectral Density*, ASD) a kétoldalas teljesítménysűrűség-spektrum négyzetgyöke:

$$A_s(f) = \sqrt{P_s(f)} \text{ és } a(f) = \sqrt{s^2(f)}. \quad (13)$$

Megjegyezzük, hogy az amplitúdósűrűség-spektrum kétoldalas mennyiség, azonban bevezethetjük az egyoldali változatát is (mint a teljesítménysűrűség-spektrumnál). A továbbiakban elsősorban az egyoldali ASD-vel foglalkozunk.

Az alkalmazások szempontjából fontos megemlítenünk további, ASD-ből származtatott speciális mennyiségeket és kitérni azok dimenzióira:

- Elmozdulássűrűség-spektrum (*Displacement Spectral Density*, DSD): ekkor a végpont tükrök $x(t)$ kitérését tekintjük a bemeneti idősornak, azaz $s(t) = x(t)$.
- Deformációsűrűség-spektrum (*Strain Spectral Density*, SSD): ez esetben közvetlenül a gravitációs hullámok okozta relatív $h(t)$ deformáció (torzulás, *strain*) amplitúdója alkotja a bemeneti adatsort, tehát $s(t) = h(t)$.

A következőkben áttekintjük a fentiekben definiált, illetve azokból származtatott mennyiségek dimenzióit:

- A teljesítménysűrűség-spektrum (PSD) definíciós képletéből látható, hogy az autokorreláció dimenziótlan, azaz $[(s \star s)(\tau)] = 1$; a bázisfüggvény definíció szerint

dimenziótlan; így marad a $[\tau] = \text{s}$. Tehát a PSD dimenziója másodperc, azaz:

$$[P_s(f)] = \text{s} = \frac{1}{\text{Hz}}. \quad (14)$$

- Az amplitúdósűrűség-spektrum (ASD) definíciójából következik, hogy dimenziója $\sqrt{\text{s}}$. Tehát

$$[A_s(f)] = \sqrt{\text{s}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Hz}}}. \quad (15)$$

- Az elmozdulássűrűség-spektrum (DSD) definíciója alapján dimenziója:

$$[X_{\text{DSD}}(f)] = [X_{\text{D}}(f)] = \frac{\text{m}}{\sqrt{\text{Hz}}}. \quad (16)$$

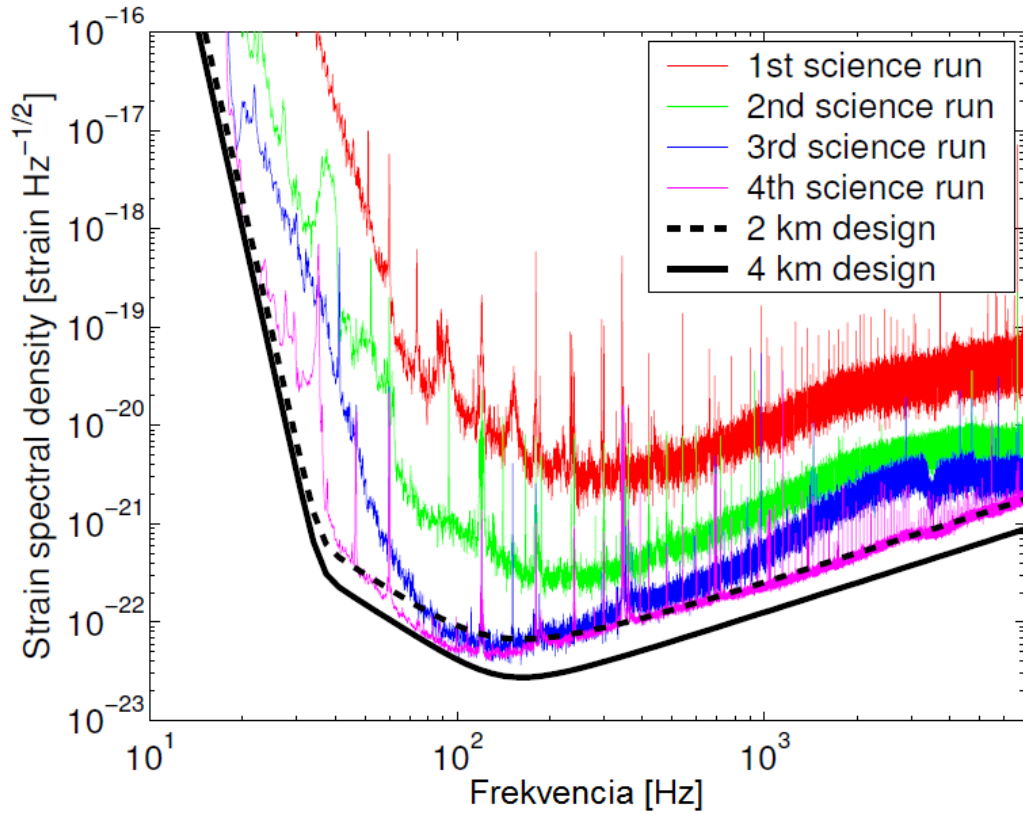
- A deformációsűrűség-spektrum (SSD) definíciója szerint (mivel a $h = \frac{\Delta l}{l}$ *strain* dimenziótlan mennyiség):

$$[X_{\text{SSD}}(f)] = [X_{\text{S}}(f)] = \frac{1}{\sqrt{\text{Hz}}}. \quad (17)$$

Gyakori jelölései: $\Delta l/l \text{ Hz}^{-1/2}$, $h(f) [1/\sqrt{\text{Hz}}]$, ezáltal hangsúlyozva, hogy az SSD van ábrázolva. A tengelyfeliratokon a deformációsűrűség-spektrumot nevezhetik amplitúdósűrűség-spektrumnak, illetve ezzel egyenértékűen amplitúdóspektrum-sűrűségnek is a szakirodalomban (1. ábra).

Megjegyezzük, hogy legtöbbször a DSD-t és az SSD-t egyoldali mennyiségként használjuk. Mint arra korábban utaltunk, igen gyakran az SSD-vel jellemzik az interferometrikus gravitációshullám-detektorok érzékenységét: az ilyen grafikonokon a függőleges tengelyen konvencionálisan a deformációsűrűség-spektrumot ábrázolják a frekvencia függvényében. Igen gyakori, hogy mindkét tengely logaritmikus beosztású, mivel a gravitációshullám-asztrofizikában a jellemző frekvencia- és „deformációsűrűség” értékek sok nagyságrendet fednek le. A mai interferometrikus detektoroknál az érzékelhető minimális abszolút hosszváltozás egyes, szűk frekvenciaablakokban elérheti a $\Delta l \approx 10^{-18}$ m értéket is! Ez relatív deformációban (*strain*) kifejezve $\approx 10^{-21} - 10^{-22}$ [1].

Láttuk, hogy a fent bevezetett, illetve azokból származtatott mennyiségek mind sűrűség jellegűek (a frekvencia térben, innen a spektrum elnevezés). Itt jegyeznénk meg, hogy mivel egyelőre nincsen számottevő magyar nyelvű szakirodalma a gravitációshullám-asztrofizikának, ezért a speciális fogalmak magyar elnevezései nem kristályosodtak még ki: például ezért fordul elő a spektrum-sűrűség és a sűrűség-spektrum kifejezés többször,



1. ábra. A LIGO detektorok érzékenység-görbéje (pontosabban a LIGO időátlagolt zajának ASD-je – a kimért zajszint a frekvencia függvényében). Az alsó vastag fekete vonalak a tervezett maximális érzékenységet jelölik: a folytonos vonal a 4 km-es LIGO detektorét (H1 és L1), a szaggatott vonal pedig a 2 km-es detektorét (H2). A vékonyabb színes vonalak az érzékenység időbeli javulására, a zajszint csökkenésére utalnak, a tényleges érzékenységet mutatják. A legfelső (piros) vonal az S1, az alatta lévő (zöld) vonal az S2, az ez alatt lévő (kék) vonal az S3, a legalsó (sárga) vonal pedig az S4 adatgyűjtő szakaszok alatt mért értékeket jelzik (a 4 km-es L1 vagy a H1 esetén mindig a jobbik ábrázolva). Az utolsó, S5 adatgyűjtő időszak alatt az érzékenység gyakorlatilag elérte a vastag (fekete) vonalak által jelölt, tervezett értéket. A függőleges tengelyen a szokásos mértékegységet, az amplitúdósűrűség-spektrumát ábrázoltuk. [3]

egymás szinonímájaként. Mindenesetre törekedni kell a jövőben egy magyar kifejezés és az angol rövidítés konzisztens használatára a különböző fogalmak esetén.

A vizsgált jel p teljesítményének (ami arányos a jel energiartalmával) meghatározásához a PSD-t adott frekvenciatartományban integrálni kell:

$$p = \int_{f_1}^{f_2} P_s(f) df. \quad (18)$$

Logaritmikusan beosztású frekvenciaskála esetén a teljesítmény a következő:

$$p_{\log} = \int_{f_1}^{f_2} P_s(f) \cdot f \, d(\ln f). \quad (19)$$

Ehhez hasonlóan az x összesített elmozdulások és h deformációk meghatározásához integrálnunk kell a megfelelő egyoldalas, amplitúdó jellegű mennyiségeket. Az elmozdulás a következőképpen adható meg:

$$x = \int_{f_1}^{f_2} X_D(f) df. \quad (20)$$

Logaritmikusan beosztású frekvenciaskála esetén az előző képlet a következő alakot veszi fel:

$$x_{\log} = \int_{f_1}^{f_2} X_D(f) \cdot f \, d(\ln f). \quad (21)$$

A teljes frekvenciatartományra:

$$x_{\text{total}} = \int_0^{+\infty} X_D(f) df. \quad (22)$$

Az deformációk a következőképpen számíthatók ki:

$$h = \int_{f_1}^{f_2} X_S(f) df. \quad (23)$$

Logaritmikusan beosztású frekvenciaskála esetén a képlet a következő:

$$h_{\log} = \int_{f_1}^{f_2} X_S(f) \cdot f \, d(\ln f). \quad (24)$$

A teljes frekvenciatartományra:

$$h_{\text{total}} = \int_0^{+\infty} X_S(f) df. \quad (25)$$

A fentiek alkalmazásaként vizsgáljuk az $s(t)$ fehér zajt ($\mu(s) = 0$)! Ismert, hogy ez esetben az autokorrelációs függvény

$$r_s = (s \star s)(\tau) = \sigma_s^2 \delta(\tau). \quad (26)$$

Ekkor a PSD egyszerűen meghatározható (ugyanis $\mathcal{F}(\delta) = 1$):

$$P_s(f) = \sigma_s^2. \quad (27)$$

Ez egy konstans függvény, ami a jel varianciájával arányos. Látható a LIGO interferometrikus detektorainak zajgörbéit tanulmányozva, hogy azok csupán igen szűk frekvenciaablakokban (nagyságrendileg a 100 Hz-es tartományban) tekinthetők jó közelítéssel konstansnak. Ebből következik, hogy a LIGO detektorokból származó zaj nem fehér zaj. A detektoraink sajátos zajgörbéinek minél pontosabb kimérése, ismerete és megértése kiemelt fontossággal bír. Ezért a következő fejezetben a teljesítményspektrum becslési módszereit vesszük górcső alá. Megjegyezzük, hogy a téma egy részletes összefoglalóját található az érdeklődő olvasó a [6] hivatkozás alatt.

2. A teljesítményspektrum becslési módszerei

Az interferometrikus detektorokban valamilyen állandóan jelenlévő jelet (célszerűen a végponttükrök kitérésével arányos jelet) mind korlátozott időtartamokig, mind jól meghatározott mintavételi frekvencia (jellemzően a LIGO-ban $F_s = 16$ kHz) és felbontás mellett mintavételezünk. Ezért a valós mérések eredménye mindig egy véges N elemű, diszkrét $x[n]$ idősor (*time series*), amit a további feldolgozás szempontjából egydimenziós vektornak is tekinthetünk. Ezen véges idősor alapján kellene olyan becslést adni a jelenlévő jelet teljesítményspektrumára vonatkozóan, hogy $N \rightarrow +\infty$ esetén konvergáljon az a valós PSD-hez. [7]

Alapvetően kétféle módszert különböztethetünk meg a spektrális becslések területén:

1. **Parametrikus becslések:** ekkor feltételezzük, hogy a lejátszódó stacionárius, sztochasztikus folyamat leírható viszonylag kis számú paraméterrel. Tehát rendelkezünk valamiféle modellel a lejátszódó folyamatra vonatkozóan, és a modellünk szabad paramétereire igyekszünk becsléseket találni (részben elméleti úton, részben a kísérletekre támaszkodva), majd ezt illeszteni a megfigyeléseinkhez. Példák: autoregresszív mozgó átlag becslés (*Autoregressive moving average estimation*, ARMA), legkisebb négyzetek spektrális analízis (*Least-squares spectral analysis*, LSSA). [5]
2. **Nem-parametrikus becslések:** éppen ellenkezőleg a parametrikus becslésekkel, a nem-parametrikus becslési módszerek alkalmazásakor expliciten, bármilyen modell feltételezése nélkül próbáljuk megbecsülni a lejátszódó folyamat spektrumát, kizárólag a gyűjtött adatainkra támaszkodva. Példák: periodogram, Bartlett-módszer, Welch-módszer. [4]

A következőkben a nem-parametrikus becslési módszereket tekintjük át.

2.1. Nem-parametrikus becslések

2.1.1. Periodogram

Elméletileg diszkrét időjel teljesítménysűrűség-spektruma a következő:

$$\text{PSD}[f] = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left\langle \frac{1}{2M+1} \left| \sum_{n=-M}^M x[n] e^{-i2\pi f n} \right|^2 \right\rangle. \quad (28)$$

A fenti egyenletben a torzítatlan becslés elvének megfelelően választottuk meg a normálási tényezőt; határesetben végtelen sok véges elemszámú sorozat átlagolásával egzaktul megkapjuk a teljesítményspektrummal arányos eredményt.

A valóságban a fenti elveknek megfelelően ezt kell becsülnünk. A legkézenfekvőbb, legegyszerűbb módszer erre a célra az ún. periodogram. Tekintsünk egy N elemszámú diszkrét $x[n]$ idősort, ekkor a periodogramja a következő:

$$P[f] = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi f n} \right|^2. \quad (29)$$

Látható, hogy $N \rightarrow +\infty$ esetén a $P \rightarrow \text{PSD}$. Azonban a módszer egyszerűségéből fakadóan több hátrányával is szembesülünk:

- A variancia nem zérus értékű, minden N -re jó közelítéssel konstans értékű. A spektrum „homályos” lesz, a korlátozott elemszám miatt erősen torzított a becslésünk.
- Továbbá az elméleti (valódi) spektrumhoz képest a becslésünk függőlegesen eltolt (*bias*).

Az N elemszám növelésével a variancia és a *bias* csökkenthető, a becslésünk javítható. [2, 4]

2.1.2. Bartlett-módszer

A periodogram becslés egyes hibáit javítandó született meg a Bartlett-módszer. Ekkor első lépésként az N adatpontot L darab K elemből álló kisebb szakaszra bontjuk. A szakaszok száma nyilván: $L = N/K$. Minden egyes szakasznak elkészítjük a periodogramját, majd ezeket összeátlagoljuk [8]:

$$P_{\text{átlag}}[f] = \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} P^m[f]. \quad (30)$$

Az eredményként kapott becsült teljesítményspektrum varianciája (szórása) a periodogram becsléséhez képest csökken ($1/K$ -val). Azonban a rövidebb használt szakasz miatt

a fellépő *bias* nagyobb. Azonban nem ár nélkül jutunk az előnyhöz: a felbontás rovására csökken a σ variancia. Ezen állítás belátásához tekintsük a következő tételt:

Két szinuszhullám f_1 és f_2 frekvenciával csak akkor különböztethető meg egy N elem hosszú diszkrét mintában, ha

$$f_1 - f_2 > \frac{F_s}{N} \rightarrow \Delta f \sim \frac{1}{N}, \quad (31)$$

ahol F_s a mintavételi frekvencia, a Δf -et nevezhetjük frekvencia felbontásnak. Ha L darab K elem hosszúságú szakaszból becsüljük a PSD-t egy darab $N = L \cdot K$ hosszúságú minta helyett, úgy $1/N$ felbontás helyett $1/K$ lesz a felbontás, ami L -szer rosszabb. Pontosan a felbontása a szakaszoknak (periodogramoknak) és az átlaguknak F_s/K lesz. Összefoglalva a Bartlett-módszer javítja az egyszerű periodogram módszer varianciáját (csökkenti), viszont rontja a *bias*t (növeli) és a felbontást (csökkenti). Tehát a variancia csökkentése vezet a felbontás romlásához, mellékeffektusként pedig növekszik a *bias*.

2.1.3. Welch-módszer

A Welch-módszer (vagy Welch-periodogram) becslése tovább javítja – egyben általánosítja – a Bartlett-módszert ablakfüggvények bevezetésével (csökkenti a becslésünk „zaját”, ami elsősorban az adatsorunk véges elemszáma és az adatpontok random hibája (varianciája) miatt lép fel). A zaj számottevő csökkentése részben a frekvenciafelbontás csökkentésével érhető el. A becslés lépései a következők:

1. Egy N elem hosszúságú diszkrét mintát L darab M hosszúságú, D elemnyit *átfedő* szakaszra bontunk. Megjegyezzük, hogy, ha $D = M/2$, akkor az átfedés definíció szerint 50%-os, ha $D = 0$, akkor 0%-os (Bartlett-módszer).
2. Választunk egy megfelelő $w(t)$ ablakfüggvényt, elvégezzük alkalmazásával (vele összeszorozva) az adott $x(t)$ szegmensre a diszkrét Fourier-transzformációt (DFT) (itt az egyszerűség kedvéért a folytonos függvényekre vonatkozó képletek szerepelnek):

$$„X(f)” = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot w(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt. \quad (32)$$

Ismert, hogy egy szorzat idő térbeli Fourier-transzformációja konvolúciónak felel meg a frekvenciatérben:

$$\mathcal{F}(x(t) \cdot w(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)W(f - \nu)d\nu = \text{conv}(X(f), W(f)). \quad (33)$$

Ideális eset a végtelen hosszú négyzetes $w(t)$ ablakfüggvény az idő térben, mivel ennek $W(f)$ spektruma a Dirac-delta függvény. Ez esetben nem jelenik meg torzítás a becslésünkben. Ezt igazolandó tekintsük a következő számítást:

$$W(f) = \delta(f) \rightarrow \mathcal{F}(x(t) \cdot w(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\delta(f - \nu)d\nu = X(f). \quad (34)$$

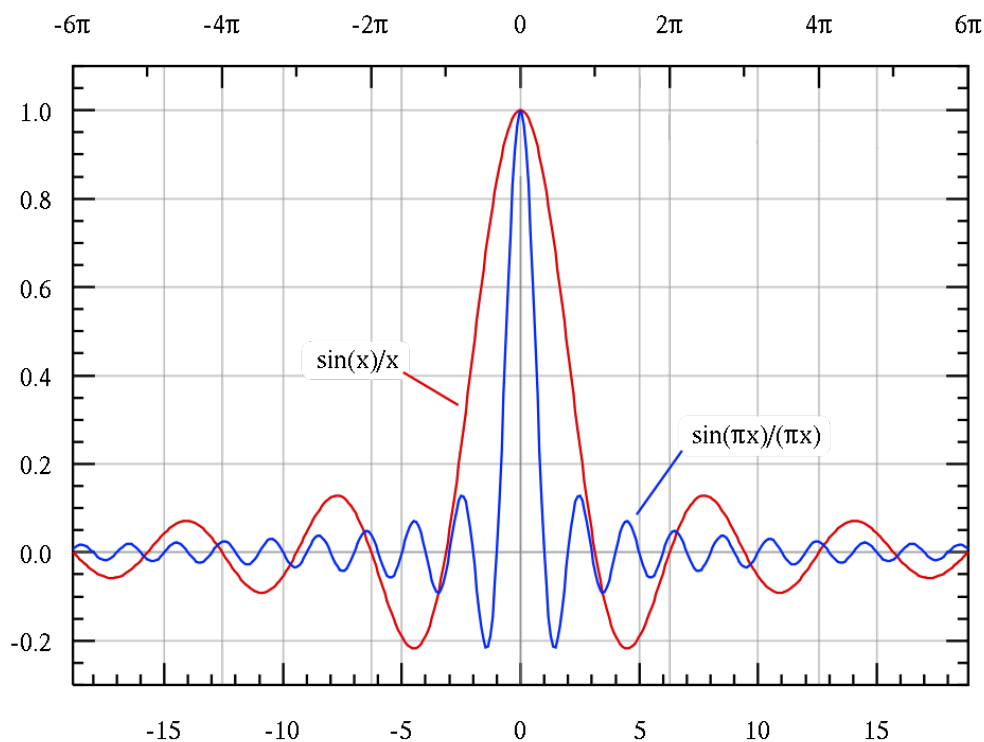
Azonban a valóságban nyilván nem használhatunk ilyen idealizált, végtelen hosszú ablakfüggvényt. A fentiekből látszik, hogy az a cél, hogy olyan $w(t)$ függvényt használjunk, aminek a $W(f)$ spektruma minél közelebb van a Dirac-delta függvényéhez (közepénél minél csúcsosabb és minél kisebbek az ablakfüggvény spektrumának oldalsávjai a főcsúchoz képest).

Általában az ablakfüggvények alkalmazása az adatszegmens végein okoz veszteséget, de éppen ezt kiküszöbölendő lappoltatjuk át a szegmenseket! Majd természetesen eldobjuk a fázisinformációt, és a spektrális amplitúdó abszolútérték négyzetét meghatározzuk. Hasonlóan meghatározzuk az összes átlapoló szakasz periodogramját, majd ezeket átlagoljuk. Az átlagolással csökken a variancia. Az eredmény az átlagolt Welch-periodogram. [9]

A Bartlett-módszer hátrányai részben az egyes szakaszok közötti éles vágások miatt léptek fel. Az egyes peridogramok éles szeparációja artifaktok (mellékeffektusok) megjelenéséhez vezet, amelyek számottevően torzítják a becslésünket. Persze az ablakfüggvények megjelenése újabb artifaktok fellépéséhez vezethet. Ezért meg kell keresnünk az adott feladatunkhoz leoptimálisabb, a legtöbb előnyt a lehető legkisebb árért cserébe nyújtó ablakfüggvényt. A legegyszerűbb választás, a négyzetes ablakfüggvény (Dirichlet-függvény) a valóságban ritkán kerül alkalmazásra, csak elméleti jelentősége van. Egyszerűségéért (egy paraméterrel leírható) cserébe számottevően torzítja a becslésünket. Ezen torzítás vizsgálata érdekében tekintsük a $w(t)$ négyzetes ($2a$ hosszú, egységnyi) ablakfüggvény $W(f)$ Fourier-transzformáltját!

$$\begin{aligned} W(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-a}^a e^{-i2\pi ft} dt = \left[\frac{e^{-i2\pi ft}}{-i2\pi f} \right]_{-a}^a = \frac{e^{-i2\pi fa}}{-i2\pi f} - \frac{e^{i2\pi fa}}{-i2\pi f} = \\ &= \frac{e^{i2\pi fa} - e^{-i2\pi fa}}{i2\pi f} = \frac{\sin(2\pi fa)}{\pi f} = 2a \cdot \frac{\sin(2\pi fa)}{2\pi fa} \end{aligned} \quad (35)$$

Ha ezt ábrázoljuk (2. ábra), láthatjuk, hogy a központi csúcs mellett szimmetrikus fordozódások jelennek meg az ablakfüggvény véges a hosszúsága miatt. Korábban láttuk,



2. ábra. A négyzetes ablakfüggvény Fourier-transzformáltja (sinc).

hogy ezek a fodrozódások – pontosabban, eltérések a Dirac-deltától – vezetnek az artifactokhoz a transzformáció során. Viszont az a növelésével ezek „beleolvadnak” a központi csúcsba, az egyre inkább dominánsabbá válik. Határesetben teljesen lecsengenek és egy Dirac-deltát kapunk:

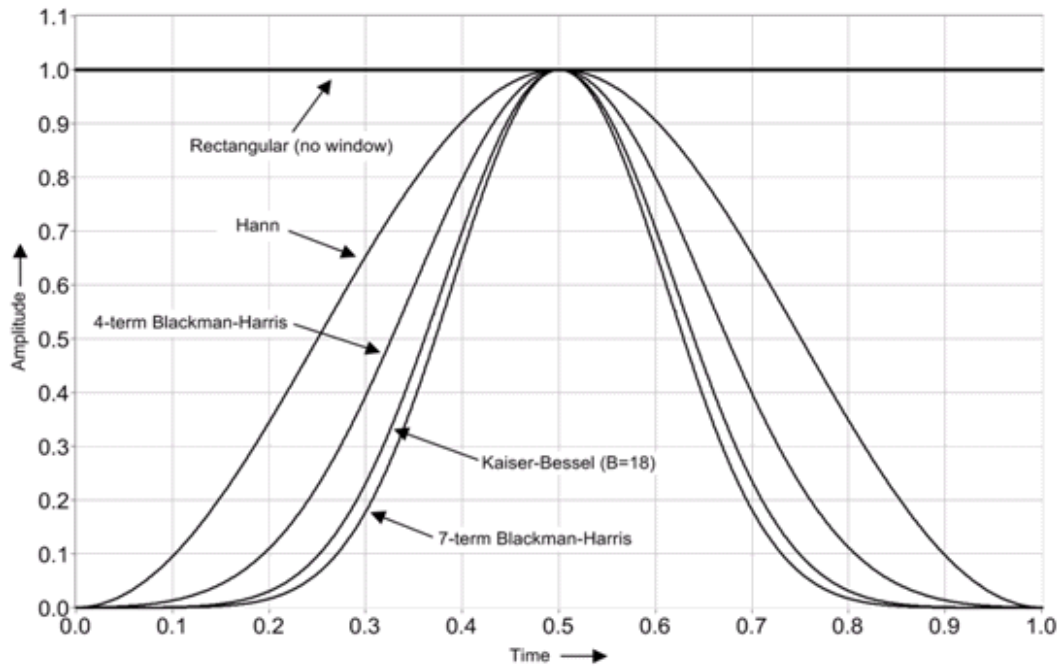
$$\text{Def. } \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(2a \cdot \frac{\sin(2\pi fa)}{2\pi fa} \right) = \delta(f). \quad (36)$$

Az előzőekben már felhasználtuk a következő, ismert összefüggéseket:

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = \text{const} \text{ és } \mathcal{F}(\text{const}) = \delta(f). \quad (37)$$

Számos ablakfüggvényt fejlesztettek ki a módszer széleskörű alkalmazása miatt. Néhány példa: Hann, Hamming, Tukey, Cosine, Lanczos, háromszögű, Gauss, Blackman, Kaiser (3. ábra).

Megjegyezzük, hogy a MATLAB programcsomagban a `pwelch` függvény a fenti eljáráshoz hasonlóan határozza meg az átlagolt Welch-periodogramot.



3. ábra. Különböző ablakfüggvények összehasonlítása idő térben.

2.2. Parametrikus becslések

A parametrikus becslések esetén rendelkezünk előzetes zajmodellel [5]. Általában az alkalmazott modelleknek viszonylag kis számú paraméterük van. A modellünk szabad paramétereire keresünk minél pontosabb becsléseket, majd azt illesztjük a gyűjtött adatsorunkhoz. Különböző iterációs eljárásokkal, precízebb megfigyelésekkel, számítógépes numerikus szimulációkkal tovább finomíthatjuk a paraméterkészletünket, majd újabb tesztek végezhetünk valós adatokon. Így, ha a kiindulási feltételeink és a paraméterkészletünk megfelelő volt, igen jól megközelíthetjük a valós teljesítményspektrumot. Ezen fejezet elején található az érdeklődő olvasó parametrikus becslési módszerekre példákat.

Hivatkozások

- [1] B. P. Abbott, R. Abbott, F. Acernese, R. Adhikari, P. Ajith, B. Allen, G. Allen, M. Alshourbagy, R. S. Amin, S. B. Anderson, and et al. Searches for Gravitational Waves from Known Pulsars with Science Run 5 LIGO Data. *The Astrophysical Journal*, 713:671–685, April 2010.
- [2] American Statistical Association, Institute of Mathematical Statistics, and JSTOR (Organization). *The Annals of mathematical statistics*. Number 8-9. k. Institute of Mathematical Statistics, 1937.
- [3] Chatterji, S. K. The search for gravitational-wave bursts in data from the second LIGO science run. 2005. Ph.D. Thesis, MIT Dept. of Physics.
- [4] Corder, G. W. and D. I. Foreman. *Nonparametric Statistics for Non-Statisticians: A Step-by-Step Approach*. John Wiley & Sons, 2009.
- [5] Geisser, S. and W. M. Johnson. *Modes of Parametric Statistical Inference*. John Wiley & Sons, 2006.
- [6] Norton, M. P. and D. G. Karczub. *Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers*. Cambridge University Press, 2003.
- [7] Priestley, M. B. *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, 1991.
- [8] Proakis, J. G. and D. G. Manolakis. *Digital Signal Processing*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [9] Welch, P. D. The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio Electroacoustics*, AU-15:70–73, 1967.