

# Adatreprezentációk és adatműveletek

Sárádi András<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest<sup>a</sup>

## Idősorok jellemzése

A gravitációs hullámok észlelését célzó detektorrendszer alapját képező interferométer kimenetén egy diszkrét idősort rögzítünk. Az idősor értékei a beérkező gravitációshullám-jel  $h(t)$  strain arányosak. A jel természetesen  $n(t)$  zajjal is terhelt.

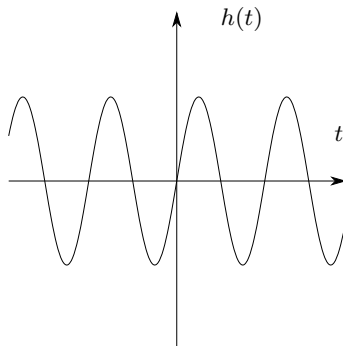
Az idősor általánosságban egy valós értékű folytonos függvény diszkrét időközönként végzett mintavételezésének eredménye (kimenete). Fizikai értelemben tehát az idősor a folytonos időhöz rendel valamilyen folytonos vagy diszkrét mennyiséget. A mintavételezés egyenlő,  $\Delta t = \frac{1}{f_s}$  időközönként történik, ahol  $f_s$  a mintavételi frekvencia. A LIGO detektorok esetén  $f_s = 16384\text{Hz}$ . Digitális jelfeldolgozás során a folytonos időskálát valamilyen diszkrét skálával kell helyettesítenünk. A jel megfelelő értékének ilyen diszkrét időskálához való hozzárendelését nevezzük mintavételezésnek.

## Adatsor reprezentációk típusainak áttekintése

Adatsorok reprezentációjára több lehetőség is kínálkozik. Ezeket először a végeredményre összpontosítva tekintjük át.

### Idősor

Bevezetőben tárgyaltak alapján az idősor már diszkrét, de folytonos függvénnyel jellemezhető analóg mennyiség mintavételezésének eredménye. A fenti meghatározásból adódón a természetes választás az idő térben történő ábrázolás. Az 1. és a 2. ábrákon folytonos és diszkrét idősorra láthatunk példát.

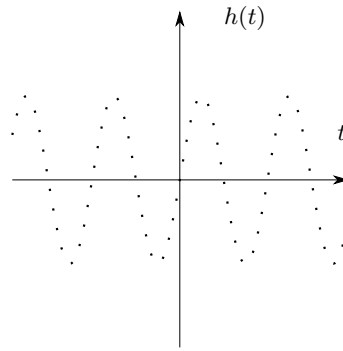


1. ábra. Példa folytonos idősorra. A fizikai jelünket ilyen, az idő folytonos függvényének tekintjük

A gravitációshullám-detektorok kimenete minden esetben diszkrét idősornak tekinthető. Ez a folytonos jel valamilyen periodikus időközönként mintavételezett alakja.

---

<sup>a</sup>Electronic address: [saradiandras@caesar.elte.hu](mailto:saradiandras@caesar.elte.hu)



2. ábra. Példa diszkrét idősorra, az adatfeldolgozást ilyen, diszkrét idősorral végezzük

### Spektrum

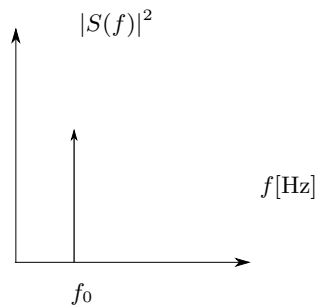
Szintén egyváltozós reprezentáció a jel spektruma, azaz a frekvencia térben történő ábrázolása. A spektrum az  $s(t)$  folytonos időtérben ábrázolt jelalak Fourier transzformáltja:

$$S(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (0.1)$$

Tehát  $S(f)$  komplex mennyiség,

$$S(f) = A(f) \cdot e^{i\varphi(f)} \in \mathbb{C} \quad (0.2)$$

két valós értékű függvénnyel,  $A(f)$  amplitúdó spektrummal, és  $\varphi(f)$  fázis spektrummal kifejezhető.



3. ábra. Példa amplitúdó spektrumra, az ábra fent bemutatott idősor spektrumát illusztrálja, a monokromatikus jel spektruma jel frekvenciájában található dirac-delta. Az ábrán látható dirac-delta[2] disztribúció jelölése, tehát nem egy függvénygörbét jelöl. A disztribúció egy általánosított függvény fogalom melynek tárgyalása meghaladja jelen dolgozat kereteit [3]

Frekvencia térből idő térbe való leképezést az inverz-Fourier transzformáció valósítja meg:

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi ft} df \quad (0.3)$$

Mintavételezett jelalak esetében egy  $N$  hosszúságú diszkrét  $s[n]$  idősorra vizsgálhatjuk a Fourier-transzformáció diszkrét változatát,

$$S_k = \sum_{k=0}^{N-1} s[n] e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \quad (0.4)$$

illetve ennek inverzét:

$$s[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \quad (0.5)$$

Látható hogy a transzformációk diszkrét illetve folytonos változatai közötti konzisztenciát az  $N \rightarrow \infty$  átmenet az  $(1 \Rightarrow) \Delta t \rightarrow dt$  és a  $\Delta f = \frac{1}{N} \rightarrow df$  határértékeken keresztül teremti meg. Továbbiakban a Fourier-transzformációra és annak inverzére használjuk az alábbi jelölést általános értelemben a diszkrét és folytonos esetekre:

$$H(f) = \mathcal{F} \{h(t)\} \quad (0.6)$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \{H(f)\} \quad (0.7)$$

A transzformáció az alábbi tulajdonságoknak tesz eleget:

- Linearitás

$$h(t) = af(t) + bg(t) \rightarrow H(f) = aF(f) + bG(f) \quad (0.8)$$

- Transzláció

$$h(t) = f(t - t_0) \rightarrow H(f) = e^{-i2\pi f t_0} F(f) \quad (0.9)$$

- Moduláció

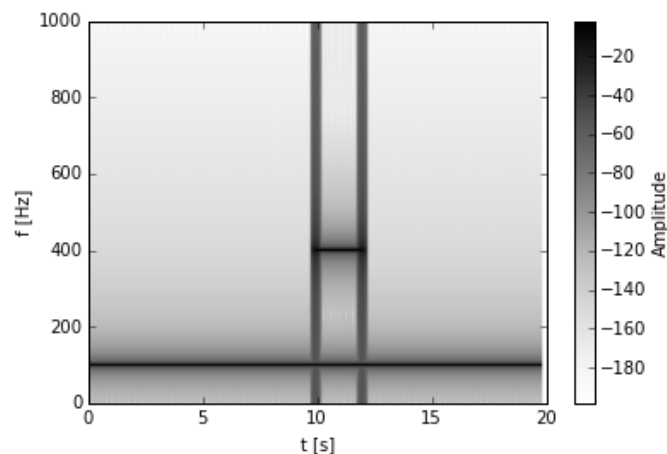
$$h(t) = e^{-i2\pi f_0 t} f(t) \rightarrow H(f) = F(f - f_0) \quad (0.10)$$

- Skálázhatóság

$$h(t) = f(at) \rightarrow H(f) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{f}{a}\right) \quad (0.11)$$

### Spektrogram

Jelminták keresésére különösen alkalmas megközelítés a jelnek egy kétváltozós reprezentációja, a spektrogram, melyet egy idő-frekvencia térben történő reprezentációnak tekinthetünk. Ez a megközelítés alkalmas a jel frekvencia térbeli jellemzőinek időbeli változásainak vizsgálatára.



4. ábra. Egy általános példa a spektrogramra.[4] A pixelekhez tartozó árnyalat arányos az adott mintavételi időben, az adott frekvenciához tartozó  $|S(f, t)|^2$  amplitúdó négyzettel

Összefoglalva:

- Idősor

$$t \rightarrow A$$

- Spektrum

$$f \rightarrow A$$

- Idő-frekvencia térkép (spektrogram)

$$t, f \rightarrow A$$

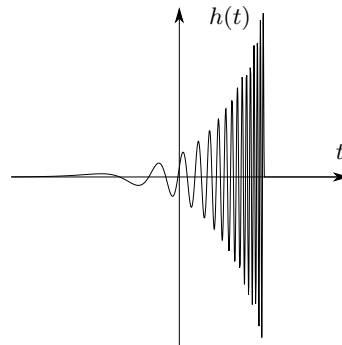
vagy

$$t, \log(f) \rightarrow A$$

A továbbiakban részletesen megvizsgáljuk, az egyes reprezentációkat, milyen motivációból építhetjük fel őket, és hogy alkalmazhatóak.

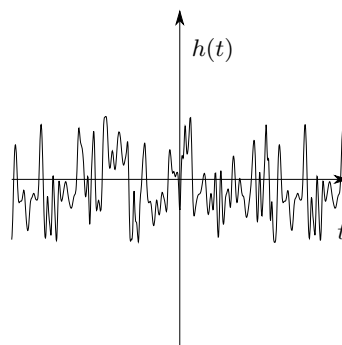
### Idősorok csoportosítása statisztikus tulajdonságok alapján

Valamilyen ismert modelltől jóslott jelalakot a továbbiakban determinisztikus idősornak tekintjük. Ilyen például az 5. ábrán illusztrált összeolvadó kettős rendszerekre felírt modelltől jóslott jelalak.



5. ábra. Példa determinisztikus jelalakra időtér-beli ábrázolásban

Sztocasztikus idősorok esetében a jelalaknak csak valamilyen eloszlása ismert. Stacionárius sztochasztikus idősorról akkor beszélünk ha ez a jelalakra vonatkozó eloszlás tulajdonságai nem függenek az időtől. Tipikusan ilyeneket tekintünk a 6. ábrán látható zaj hatásoknak.



6. ábra. Példa sztochasztikus jelalakra időtartományban

Stacionárius sztochasztikus jeleket is tovább csoportosíthatjuk szigorú értelemben vett illetve tágabb értelemben vett stacionárius jelekre. Első esetben az eloszlás minden momentumára megköveteljük az időbeli függetlenséget, míg a tágabb értelemben vett stacionárius jel esetében ezt csak az átlagra és a szórásra (első két momentumra) követeljük meg. Sztocasztikus jeleknél a fázisspektrum nem hordoz információt.

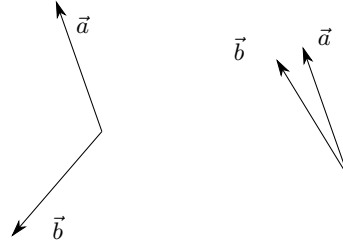
### Jelalakok összehasonlítása

Szemléletes kép megalapozására gondoljunk két darab két komponensű vektorra. Milyen értelemben lehet ezeknek a hasonlóságát vizsgálni? Ha két vektor egy irányba mutat, az általuk bezárt  $\varphi$  szög nulla. Ilyenkor  $\cos(\varphi) = 1$  vagyis a két vektor skaláris szorzata valamilyen értelemben mértéke a két vektor hasonlóságának.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \quad (0.12)$$

Ha mindezt még leosztjuk a vektorok normájával, egy olyan mértéket kapunk, melynek értéke 1 ha a két vektor iránya azonos, 0 ha azok merőlegesen egymásra és  $-1$ -t ha ellentétes irányba mutatnak.

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (0.13)$$



7. ábra. Példa "különböző" (bal oldal) illetve "hasonló" (jobb oldal) vektorokra

Másrésről a vektorokat reprezentálhatjuk valamilyen ortonormált bázison való kifejtésük komponenseiként.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (0.14)$$

Ebben a reprezentációban a skaláris szorzat a megfelelő komponensek szorzatainak összege

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (0.15)$$

Most gondoljunk a diszkrét idősorunk értékeire úgy, mint a vektorok komponenseire. A fenti gondolatmenet alapján meghatározhatunk hasonlósági mértéket két idősor között. Ha két,  $s_1(t)$  és  $s_2(t)$  idősort abban az értelemben akarunk összehasonlítani, hogy megengedünk egymáshoz képest tetszőleges időbeli eltolást, az alábbi műveletet konstruálhatjuk:

$$(s_1 * s_2)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t + \tau) dt \quad (0.16)$$

A fenti műveletet két idősor keresztkorrelációjának nevezzük. Egy jel önmagával vett keresztkorrelációját nevezzük autokorrelációnak

$$(s_1 * s_1)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_1(t + \tau) dt \quad (0.17)$$

A jelkeresési eljárásaink a keresztkorrelációra vezethetők vissza. Például ha két detektor jelét keresztkorreláltatjuk és a hasonlóság mértéke egy megfelelő eltolás mellett elég nagy, akkor kizárhatjuk, hogy az észlelt jelet helyi hatások okozták. A maximális időeltolást a két detektor háromdimenziós térben vett távolsága és a fénysebesség hányadosa határozza meg. Ha ennél a maximális időeltolásnál nagyobb eltolást használunk azzal meghatározhatjuk a keresztkorrelációs együtthatók határeloszlását. Ehhez hasonlíthatjuk a fizikai időeltolásokhoz tartozó keresztkorrelációs együtthatókat. Ezzel annak mértékét kapjuk meg, hogy az adott együttható értéke mekkora valószínűséggel véletlen egyezés csupán. Erre a mértékre definiálhatunk olyan küszöbértéket, mely alatt valós riasztásról beszélhetünk

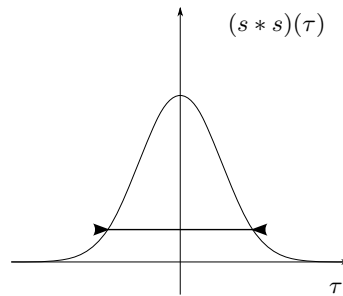
Ha adott jelenségből várható jelalakot keresünk, akkor a lehető legjobb megoldása, hogy a jelenség fizikai modelljéből leszimulálom a várható jelalakot és ezt kereszt-korreláltatom a mért jel idősorával. Ezt az eljárást nevezik minta alapú keresésnek (template-base-search), ahol a minta a modellből szimulált jelalak.

A keresztkorrelációs művelet tulajdonságai:

- Autokorrelációs függvény maximuma

$$\max \{(s * s)(\tau)\} = (s * s)(0) \quad (0.18)$$

az autokorrelációs függvény 0 értékben található maximumából kiinduló lecsengése mutatja hogy a függvény mennyire "változékony". Időben lassan változó függvényhez széles, időben gyorsan változó függvényhez keskeny csúcs tartozik.



8. ábra. Autokorrelációs csúcs szélessége  $\tau = 0$  eltolás körül

- Kereszt-korreláltatott függvények Fourier-transzformáltja, a két függvény Fourier-transzformáltjának komplex-szorzata

$$\mathcal{F} \{(s_1 * s_2)(\tau)\} = \mathcal{F}^* \{s_1(\tau)\} \mathcal{F} \{s_2(\tau)\} \quad (0.19)$$

- Autokorrelációs függvény Fourier-transzformáltja, az eredeti függvény Fourier-transzformáltjának abszolút érték négyzete.

$$\mathcal{F} \{(s * s)(\tau)\} = \mathcal{F}^* \{s(\tau)\} \mathcal{F} \{s(\tau)\} = |\mathcal{F} \{s(\tau)\}|^2 \quad (0.20)$$

Ez az amplitúdó spektrum négyzet előállítására alkalmas.  $A(f)e^{i\varphi(f)} \cdot A(f)e^{-i\varphi(f)} = A^2(f)$

- Nulla átlagú sztochasztikus zaj autokorrelációs függvénye nulla helyen egyenlő a zaj szórásnégyzetével.

$$(s * s)(\tau = 0) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \quad (0.21)$$

A keresztkorreláció műveletéhez hasonló művelet a konvolúció

$$(s_1 \bullet s_2)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(\tau - t) dt \quad (0.22)$$

A konvolúció műveleténél az egyik idősor időtükrözöttjével keresztkorreláltatunk

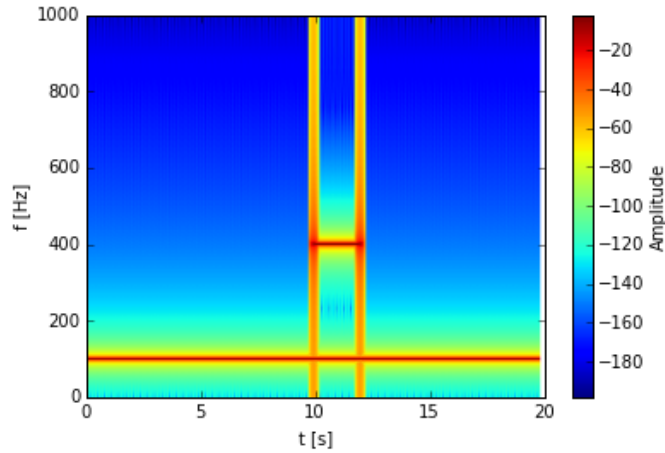
### A spektrum

A keresztkorreláció és a hasonlósági mérték segítségével jobban megérthetjük a 0.1 alatt definiált Fourier-transzformációt is. A Fourier-transzformáció során az adott jelalakot adott frekvenciájú periodikus bázisfüggvényekkel ( $\sin(2\pi ft)$ ,  $\cos(2\pi ft)$ ) hasonlítjuk össze. Így tehát az amplitúdó spektrum egyes értékei nem mások, mint a vizsgált függvény hasonlósága az egyes frekvenciájú periodikus függvényekhez.

### Az idő-frekvencia térkép

Adott idősor spektruma a teljes idősor Fourier transzformáltja. Ehelyett azonban elvégezhetjük a transzformációt az idősor rövidebb,  $T$  hosszúságú szakaszain is. Az egyes  $T$  hosszúságú időablakok egymást  $\tau$  időközönként követik. Ezek spektrumét külön ábrázolhatjuk az időtengelyre merőleges skálán. Az így kapott diagramot nevezük spektrogramnak.

Például egy monokromatikus jel képe spektrogramon egy vízszintes vonalnak fele meg, ahogyan a ?? ábrán látható. Egy időben egyenletesen változó frekvenciájú szinusz hullám képe a frekvencia változásával arányos meredekségű egyenes vonal. Egy valós mért jel spektrogramja valamilyen kétdimenziós egy árnyalatú térkép ahogyan a 4. ábrán is látható. Egyszínű árnyalatok helyett gyakran rendelnek valamilyen színskálát az amplitúdóhoz, így "színes" ábrát kapunk. Az ilyen ábra azonban csak akkor értelmezhető precízen, ha mellette feltüntetjük a szín-amplitúdó leképezést is, erre láthatunk példát a 9. ábrán.



9. ábra. Példa "színes" spektrogramra. Az ábra úgy korrekt ha a színskálához megadjuk az amplitúdó hozzárendelést. Az bemutatott ábra a Maptplotlib Python csomag dokumentációja [5] alapján készült, az eredeti példát a pontos színskála definícióval egészítettem ki. [spectrogram\\_demo.py](#)

Vagyis a spektrogram az adatsor spektrumának időfejlődését ábrázolja. Ha feltételezett forrás fizikai modelljéből ismert ez az időfejlődés, akkor jelalak keresése egy mintázat keresését jelenti a spektrogramon.

Az eltolt időablakok ablakfüggvényeit jelen esetben is megválaszthatjuk. Jelölje ablakfüggvényünket  $g(t)$ , jelünket mért jelünket pedig  $x(t)$ . Az

$$X(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)g(t - \tau)e^{-i2\pi f \tau} dt \quad (0.23)$$

kétváltozós függvény még komplex értékű. Spektrogramunkat a

$$|X(f, \tau)|^2 \quad (0.24)$$

kétváltozós valós értékű függvény írja le. A fenti transzformációt neve Short Time Fourier Transformation (STFT)

Diszkrét spektrogram esetén, fix szélességű időablakot tolnak el diszkrét időpontokba. Ebben az esetben az ablakfüggvény szélessége határozza meg a spektrogram  $\Delta t$  időfelbontását. Az ablakfüggvény szélességének növelésével romlik az időfelbontás, de javul a frekvencia felbontás. Az idő- és frekvencia felbontás között az alábbi reláció áll fenn:

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi} \quad (0.25)$$

Bizonyítható hogy az egyenlőség Gauss ablakfüggvény választással érhető el.[7] A fenti integrálban szereplő

$$g(t - \tau)e^{-i2\pi f \tau} \quad (0.26)$$

kifejezés felfogható egyben egy bázisfüggvényként is. Amennyiben  $g(t)$  Gauss függvény választással élünk, akkor az egész kifejezés neve Gauss-modulációs függvény. Ha semmilyen információnk nincs a keresendő jelről, érdemes ezt az általános bázisfüggvényt használni, mert ez adja a legjobb területfelbontást.

A keresést akár több felbontással is elvégezhetjük. Időben rövid és frekvenciafelbontásban széles jeleket például érdemes jobb időfelbontásban keresni. Ezzel szemben monokromatikus jellegű, vagyis frekvenciatarományban keskeny, de hosszú ideig tartó jeleket érdemes jobb frekvenciafelbontás mellett kereshetünk.

*Wavelet transzformáció*

További lehetőség a bázisfüggvény megválasztására az úgynevezett Wavelet transzformáció, ami bizonyos értelemben a STFT általánosítása

$$W(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{b}} \Psi\left(\frac{t-a}{b}\right) dt \quad (0.27)$$

Magának a  $W(x(t)) [a, b]$  transzformációnak két paramétere van (spektrogram esetében ezek az  $a \sim \tau$  időeltolás és a  $b \sim T$  időablak szélesség paramétereknek felelnek meg)

Általában  $\Psi_{ab} = \frac{1}{\sqrt{b}} \Psi\left(\frac{t-a}{b}\right)$  függvénnyel szemben támasztott követelmények:

- Zérus átlagú
- Véges energiataartalmú (négyzetesen integrálható)
- $t = 0$ -ra centrált

A spektrogram-hoz hasonlóan a Wavelet transzformált abszolút érték négyzetéből képezhető ábrázolása a scalogram. A felbontás  $b$ -vel illetve  $\frac{1}{b}$ -vel arányos a két tengely mentén

**Teljesítmény spektrum és teljesítmény spektrum sűrűség[6]**

Teljesítményspektrum-sűrűség az adatsor autokorrelációs függvényének spektruma

$$P_s(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (s * s)(\tau) \cdot e^{i2\pi f\tau} d\tau \quad (0.28)$$

(Power spectrum density (PSD))

A teljesítmény spektrum ennek integrálja:

$$G_s(f) = \int_{-\infty}^f P_s(\varphi) d\varphi \quad (0.29)$$

Gravitációs hullám kutatásban ez a mennyiség kevésbé fontos.

A fent definiált mennyiség úgynevezett "kétoldali" teljesítmény spektrum sűrűség mivel negatív frekvencia tartományokra is értelmezve van. Ez a tartomány nem hordoz plusz információt - hiszen  $P_s(f)$  az  $f = 0Hz$  tengelyre szimmetrikus -, ezért a gyakorlatban sokszor az úgynevezett egyoldali teljesítmény spektrum sűrűséget alkalmazzuk:

$$S^2(f) = \begin{cases} 2P_s(f) & : f \geq 0 \\ 0 & : f < 0 \end{cases} \quad (0.30)$$

Az amplitúdóspektrum-sűrűség a PSD gyöke:

$$A_s(f) = \sqrt{P_s(f)} \rightarrow A(f) \quad (0.31)$$

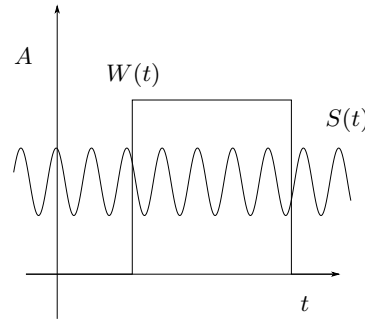
Ahol szintén értelmezünk kétoldali és egyoldali változatot.

A fenti mennyiségek dimenziói:

$$[P_s(f)] = \frac{1}{Hz} \quad [A_s(f)] = \frac{1}{\sqrt{Hz}} \quad (0.32)$$

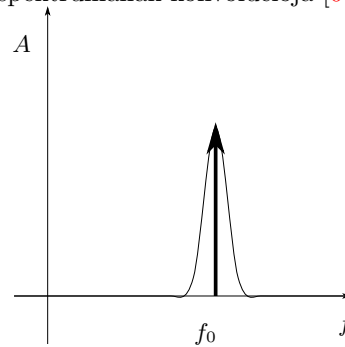
Gyakorlatban a detektor PSD-jét csak egy véges hosszúságú adatsorból tudjuk kiszámolni. Ugyanakkor a detektor PSD-je független mennyiség a minta hosszától. Azzal hogy a PSD-t véges adatsorból számoljuk torzul az eredmény.





10. ábra. Periodikus jel és az ablakfüggvény

Tekintsünk példaként egy végtelen szinusz jelet  $f_0$  frekvencián. Ennek spektruma egy  $f_0$ -ban lévő dirac-delta lenne. Ha azonban az ASD-t egy véges szélességű ablakfüggvény segítségével képezzük, akkor ez a csúcs kiszélesedik, a spektrum torzul.  $s(t)$  jelfüggvényt vizsgáljuk  $w(t)$  ablakfüggvény segítségével. Ilyenkor a mért spektrum a jel  $S(f)$  spektrumának és az ablakfüggvény  $W(f)$  spektrumának konvolúciója [0.22].



11. ábra. Az ablakolás hatására kiszélesedett csúcs

$$\mathcal{F}\{s(t) \cdot w(t)\} = (S \bullet W)(f) \quad (0.33)$$

A fenti megállapítás jól mutatja a Fourier és az inverz-Fourier-transzformáció szimmetriáját, valamint a konvolúció (kereszt korreláció) és a komplex-szorzat viszonyát. Amíg idő térben elvégzett konvolúció frekvencia-térben komplex szorzásnak felel meg, addig az idő térben végzett szorzás megfelelője frekvencia térben a konvolúció művelete.

A kapott spektrum torzultságát a konvolúció tulajdonságai miatt nem lehet egyszerű inverz művelettel kompenzálni - például az ablakfüggvény ismeretében - így a helyes jelalak helyreállítására speciális becslési módszereket kell alkalmazni.

Azokat a becslési módszereket, melyekkel a helyes ASD helyreállítható, két nagy csoportra bonthatjuk, úgynevezett nem parametrikus és parametrikus becslési módszerekre. Továbbiakban számunkra gyakorlatban a nem parametrikus becslések lesznek érdekesek.

- Diszkrét-Fourier-transzformáltra alapuló technika esetében a jelalak DFT-jéből kapott eredmény amplitúdója a periodogram. Ebben az esetben tehát a véges idősor teljes hosszán végzünk DFT.
- A periodogram módszere javítható azzal, hogy a teljes periodogramot rövidebb szakaszokra daraboljuk és ezeken külön végzünk DFT eljárást, majd ezek eredményét átlagoljuk össze. Ezzel az eljárással csökken az amplitúdó spektrum torzultsága, viszont csökken a frekvencia felbontása. Ennek az eljárásnak a neve Bartlett módszer.
- Welch módszer: A Bartlett módszerrel ellentétben - ahol a darabolást lényegében négyzetjel függvényekkel történő ablakolással végeztük el - itt más, a dirac-delta tulajdonságaira spektrumban jobban hasonlító ablakfüggvényeket választunk. Belátható, hogy a jó megoldás erre a célra Gauss-függvény használata ablakfüggvényként. Az adott mérésre kiválasztható a legmegfelelőbb paraméterekkel rendelkező ablakfüggvény.

Bővebben lásd [6]

Tovább javíthatunk az eredményeken, ha az ablakfüggvények átlapolásával csökkentjük az elvesztett információt.

Parametrikus becslések esetében a zajhatások ismeretében modellezhetjük a PSD-t. A modellben maradnak szabad paraméterek, így az egész spektrum helyett elegendő megbecsülni ezeket a paramétereket az empirikus adatsorból. Ilyen módszerre példa az úgynevezett ARMA (Autoregressive Moving Average)

### Hullámforma rekonstruálása

A mért adatsor  $i$ . amplitúdó értéke,  $x_i$  a jel  $h_i$  értékéből és a zaj  $n_i$  értékéből tevődik össze.

$$x_i = h_i + n_i \quad (0.34)$$

Az adatsor reprezentálásához szükséges lineáris operátort jelölje  $W$

$$W(x) = W(h) + W(n) \quad (0.35)$$

Ez a  $W$  ábrázoló operátor jellemzően egy bázisfüggvények szerinti kifejezés. A bázisfüggvényeket úgy érdemes megválasztani, hogy a minél jobban hasonlítsanak a keresett jelre, hogy ezáltal az ábrázolás utána jeltől és zajból származó tagok minél jobban elkülönüljenek egymástól. A fenti operátorral transzformált jelre alkalmazzuk a  $T$  úgynevezett vágási operátor

$$T(W(x)) = T(W(h)) + \underbrace{T(W(n))}_{\simeq 0} \quad (0.36)$$

ennek célja hogy a zaj tagot lényegében eltüntesse. Végül a hullámforma rekonstrukciója a  $W$  operátor inverzével végezhető el.

$$h = W^{-1}(T(W(x))) \quad (0.37)$$

Ez nyilvánvalóan csak akkor lehetséges, ha  $W$  operátor invertálható. Például a Fourier transzformáció alkalmas erre.

- 
- [1] Raffai Péter, Gravitációshullám-asztrófizika előadás, órai jegyzet, 2015.
  - [2] Wikipedia - Dirac delta, [https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac\\_delta\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function)
  - [3] Wikipedia - Distribution, [http://en.wikipedia.org/wiki/Distribution\\_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Distribution_(mathematics))
  - [4] Wikipedia - Spectrogram, <http://en.wikipedia.org/wiki/Spectrogram>
  - [5] Matplotlib Spectrogram example, [http://matplotlib.org/examples/pylab\\_examples/specgram\\_demo.html](http://matplotlib.org/examples/pylab_examples/specgram_demo.html)
  - [6] Angler Gábor, *A teljesítmény spektrum és becslési módszerei*, hallgatói dolgozat, 2011.  
[http://bolyai.elte.hu/~praffai/GH\\_Ora/Dolgozatok/12\\_Angler\\_Gabor\\_2011.pdf](http://bolyai.elte.hu/~praffai/GH_Ora/Dolgozatok/12_Angler_Gabor_2011.pdf)
  - [7] Shourov Keith Chatterji, *The search for gravitational wave bursts in data from the second LIGO science run*, Thesis, 1995.