Az ELTE Bolyai Kollégiumának Levelezős Csapatversenye

2019., második forduló

vázlatos megoldási útmutató

Minden feladat 10-10 pontot ért, így a maximális elérhető pontszám 60 pont volt.

1. feladat (földrajz – műholdkép)

A műholdképen elkülöníthető volt Óváros viszonylag kis épületekkel borított területe a környező szántóföldektől, rétektől és erdőktől. A város területének meghatározására változatos módszereket lehetett alkalmazni. Legtöbb megoldás valamilyen egyszerű geometriai alakzatokkal közelítette a város alakját és ez alapján becsülte meg a területet. Érkeztek megoldások, amik alkalmas szoftverrel megszámolták, hogy a képen hány képpontból áll a város területe; és volt olyan csapat is, amelyik kinyomtatta a képet és lefedte a várost $1\,\mathrm{km}^2$-nek megfelelő papír négyzetecskékkel. A megkapott területet a megadott népsűrűséggel megszorozva 10.000 fő körüli becsléseket lehetett kapni a város népességére.

2. feladat (fizika – leszakadt lift)

Helyezzük a helyzeti energia 0 szintjét abba a magasságba, ahol a lift megállt a fékezés végén!

A biztosítókábelek elszakadásának pillanatában a liftnek még nincs mozgási energiája, helyzeti energiája pedig

$$E_0 = mgh,$$

ahol h a lift által összesen megtett út. Amikor a lift elkezd fékezni, akkor az energiájának egy része helyzeti, egy része mozgási energiaként van jelen, azonban ezek összege megegyezik a kezdeti E_0 értékkel (még nem történt energiaveszteség). A fékezés végére a lift összenergiája 0-ra csökken (se helyzeti, se mozgási energia nem lesz), így a lift E_0 energiát ad le fékezés közben.

Mivel az F_s súrlódási erő nem változik a fékezés során, így az energialeadás egyenletesen oszlik szét a rudakon (egy kis Δs szakaszon $F_s \cdot \Delta s$ munkát végez a rudak); mivel a rudak hengeresek, így a tömegeloszlásuk is egyenletes. Ebből következik, hogy a rudaknak a fékezés által végigsúrolt, $\ell = \frac{2}{3}h$ hosszúságú szakasza egyenletesen fog felmelegedni a fékezés során.

A két rúdnak a fékezés által végigsúrolt és felmelegített darabjainak az össztömege

$$m = 2 \cdot \varrho \cdot \ell A = 2 \cdot \varrho \cdot \pi \ell \left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

és ezzel kiszámolhatjuk a hőmérséklet-változást:

$$\Delta T = \frac{E_0}{c_p m} = 7{,}81\,\mathrm{K}$$

(az osztásnál egyszerűsíteni lehet az ismeretlen h értékkel).

3. feladat (kémia – racém elegy elválasztása)

a) *(3 pont)* A leggyakrabban használt módszer racém elegyek rezolválására valamilyen diasztereomer származék képzése (pl. só vagy kovalens vegyület) egy királis anyag tiszta enantiomerjével. A diasztereomer párok fizikai tulajdonságai eltérőek, így pl. oldhatóság alapján vagy extrakcióval elválaszthatók. Elválasztás után persze fel kellszabadítani az anyagunkat. Más megoldás a kromatográfiás elválasztás királis állófázissal, vagy kinetikus rezolválás pl. enzimekkel.

b) *(2 pont)* Ez nem egy beugratós kérdés volt, ahol egyszerűen „Igen” a helyes válasz. Gabinak nem volt igaza, ez gyakorlati és elméleti megfontolások alapján is belátható. *A gyakorlati és az elméleti megfontolásokon alapuló választ is elfogadtuk, habár a feladat kitűzője eredetileg az elméleti megoldásra gondolt.*

   A gyakorlatban bölcs dolog kalibrálni a rég elhagyatott műszereket. Az oldószer fajtája és a koncentráció is befolyásolja valamennyire a forgatóképességet, ahogy ezt az egyik csapat is írta.

De pusztán elméleti megfontolások alapján sem elég egyetlen mérés. Ha túl tömény az oldat, lehet, hogy 360 foknál nagyobb az elfordulás, és nem tudhatjuk, hogy pl. 5° vagy 365°. Tömény oldatoknál azt sem lehet megállapítani egy mérésből, hogy jobbra vagy balra forgatja a fényt az oldat, pl. jobbra 179° vagy balra 181° az elfordulás. Ezért több mérést kell csinálni különböző úthosszal vagy különböző koncentrációkkal.

c) *(1 pont)* A képletbe beírva azt, hogy $c = 20\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{ml}$ és $l = 2\,\mathrm{dm}$, kapjuk, hogy

$$\alpha_{\text{meas}} = \frac{[\alpha]lc}{100} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 20}{100} = 4,8$$

és ez azt jelenti, hogy 4,8° az elfordulás.

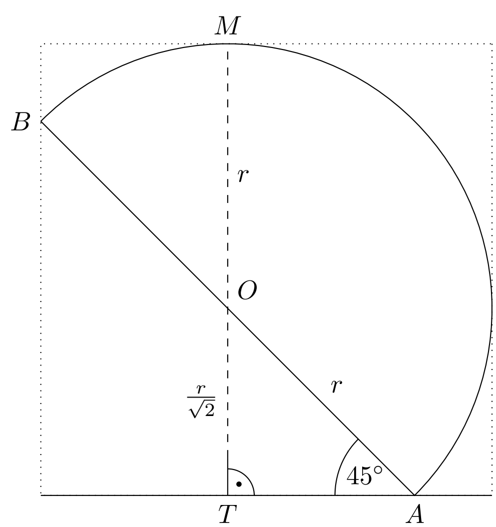
d) *(4 pont)* Legyen $c = c^+ + c^-$, ahol c a koncentráció, c^+ és c^- pedig a jobbra és balra forgató enantiomer koncentrációja. Tömegszázalékos összetétellel kifejezve $c^- = xc$ és $c^+ = (1-x)c$,

$$\alpha_{\text{meas}} = \frac{[\alpha]lc^+ - [\alpha]lc^-}{100} = \frac{[\alpha]l(1-x)c - [\alpha]lcx}{100} = \frac{[\alpha]lc(1-2x)}{100}$$

Ebből a J anyagra $x = 0,007$, a B anyagra $x = 0,011$ adódik. Így a tömegszázalékos összetételek: J elegynél 99,3% jobbra forgató és 0,7% balra forgató; B elegynél pedig 98,9% balra forgató és 1,1% jobbra forgató.

4. feladat (matematika – félgömb átszállítása ajtón)

Billentsük meg a félgömb alakú műszert úgy, hogy a félgömb alapsíkja 45°-os szöget zárjon be a vízszintessel, és toljuk át az ajtón ebben a helyzetben. (Úgy, hogy a félgömb alapsíkja illetve a félgömb haladási iránya is végig merőleges az ajtó síkjára.) A következő ábra a félgömb O középpontján átmenő függőleges síkot ábrázolja:



Az O középpont távolsága a talajtól $r \cdot \sin 45° = \frac{r}{\sqrt{2}}$ (ahol $r = 1{,}75\,\mathrm{m}$ a félgömb sugara), hiszen az ábrán bejelölt OAT derékszögű háromszög A-nál lévő szöge 45°. Könnyen meggondolható, hogy félgömb legmagasabban lévő M pontja éppen O fölött van, r távolságra O-tól. Innen látható, hogy M éppen $h = r + \frac{r}{\sqrt{2}} \approx 2{,}987\,\mathrm{m}$ távolságra van a talajtól.

Ez a számítás mutatja, hogy ezzel a módszerrel a félgömb átvihető minden legalább $h \approx 2{,}987\,\mathrm{m}$ oldalhosszúságú ajtón: ha az A pont a padlón mozog, akkor a félgömb nem akad meg az ajtó felső élénél és szimmentrikusan, ha a B pont az ajtó bal oldali élének síkjában mozog, akkor a félgömb nem akad meg az ajtó jobb oldali élénél. Így speciálisan megkaptuk, hogy az a) kérdésre **igen** a válasz.

A b) kérdéshez még meg kell mutatni azt, hogy kisebb ajtón még akkor sem vihető át a műszer, ha azt trükkösen össze-vissza forgatjuk, ahelyett, hogy csak egyenesen előrefelé tolnánk. (Ez nem teljesen magától érthetődő: például egy „S” alakú test ügyesen forgatva sokkal kisebb nyíláson átvihető, mint eltolással mozgatva.)

Vizsgáljunk egy tetszőleges mozgatási eljárást, ami átviszi a félgömböt egy bizonyos méretű ajtón! Vegyük észre, hogy a félgömb O középpontja valamikor áthalad az ajtó síkján és ebben a pillanatban az ajtó síkjába a félgömbnek egy ($r = 1{,}75\,\mathrm{m}$ sugarú) félkör alakú szelete esik (vagy esetleg a félgömb teljes alapköre, amiben szintén kiválaszthatunk egy r sugarú félkört).

Legyen α a félkört határoló átmérőnek a vízszintessel bezárt szöge! Ha $\alpha \geq 45°$, akkor a félkör legalsó és legfelső pontja között függőleges irányban $r + r \cdot \sin\alpha \geq r + r \cdot \sin 45° = h$ a távolság, tehát az ajtó magassága legalább h. Hasonlóan, ha $\alpha \leq 45°$, akkor a félkör leginkább balra és leginkább jobbra eső pontjai között vízszintes irányban $r + r \cdot \cos\alpha \geq r + r \cdot \cos 45° = h$ a távolság ($\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$), így az ajtó szélesssége legalább h.

Mivel négyzet alakú ajtóról van szó, így ez mutatja, hogy h-nál kisebb oldalhossz esetén nem vihető át a félgömb alakú műszer az ajtón.

Az a) kérdés 4 pontot ért. A b) kérdésnél 2 pontot ért a minimális oldalhossz (≈ 2,987 m) kiszámolása; 2 pontot ért annak az indoklása, hogy az eredeti térbeli feladat helyett elegendő síkban vizsgálni egy félkörnek a négyzetbe illesztését; és 2 pontot ért annak az indoklása, hogy az α szög optimális értéke 45°.

5. feladat (informatika – adatfájl kezelése)

Ezt a feladatot elsősorban programozási feladatnak szántuk; arra számítottunk, hogy legtöbb megoldás saját készítésű programmal fog történni. Ilyen típusú megoldás nem érkezett, viszont több csapat is felismerte, hogy a feladat jól kezelhető adatbáziskezelő alkalmazás segítségével. Ez alapján elmondhatjuk, hogy az ajánlott megoldási módszer az adatfájl importálása egy adatbáziskezelő rendszerbe és alkalmas SQL lekérdezések összeállítása.

Végeredmények és megjegyzések az egyes részkérdésekkel kapcsolatban:

a) *(2 pont)* 16970 főnél jelent meg a „BS2” elváltozás. Megjegyzés: ehhez nem volt szabad hozzászámolni azokat, akikre csak a „BS21” elváltozás volt jellemző – így nem volt elég az, ha valaki csupán a „BS2” karaktersorozatot tartalmazó sorokat számolta.

b) *(2 pont)* Ezek közül 4568 főnek szerepel gyermeke is az adatbázisban.

c) *(3 pont)* Ezzek közül 269 főnek szerepel „BS2” elváltozással rendelkező unokája is az adatbázisban.

d) *(3 pont)* 5939 olyan testvérpár volt, ahol mindkét testvér rendelkezik a „BS2” elváltozással. Megjegyzés: ha ketten testvérek, az 1 testvérpár; ha hárman testvérek, az 3 testvérpár; ha négyen testvérek, az 6 testvérpár; …

Minden részfeladatnál 1 pontot ért a végeredmény megadása, a többi pontot az indoklással lehetett megszerezni. Mivel a részfeladatok egymásra épültek, ezért előfordult, hogy valaki az elején hibát vétett és utána egy rosszul kiszámolt értékkel, rossz adathalmazzal dolgozott tovább. Még ilyenkor is lehetett teljes pontszámot szerezni a későbbi részfeladatokra, ha azokban nem volt újabb hiba.

6. feladat (biológia – öröklődő betegség)

a) *(1 pont)* Az öröklődés X kromoszómás, recesszív. Láthatjuk, hogy két egészséges embernek születhet beteg gyermeke, tehát az öröklődés biztosan recesszív. Láthatjuk, hogy férfiak és nők is hordozhatják, de jelentősen több a férfi beteg – ebből lehet következtetni az X kromoszómás öröklődésre. De teljes bizonyossággal nem lehet megállapítani az öröklődés autoszómás, vagy ivari voltát, így mindkettőt elfogadtuk.

b) *(2 pont)* Ha a csapat X kromoszómás öröklődést írt, akkor III/7-et egészen biztosan egészségesnek tekintik. III/3 viszont ½ valószínűséggel hordozó. Amennyiben III/3 hordozó, ½ a valószínűsége, hogy fiúgyermeke születik (lányok legfeljebb hordozók lehetnek az egészséges apa miatt), és további ½, hogy az a fiú hordozza majd a hibás allélt.

   Amennyiben autoszómásnak feltételezik, akkor viszont a beteg apa miatt III/7 egész biztosan hordozó, III/3 pedig 1/2 eséllyel. A gyerekek neme ebben az esetben mindegy, itt is III/3 dönt, és itt is ¼ lesz az esély, hogy hordozó III/3 esetén a gyerek beteg lesz. Tehát a végső eredmény mindkét esetben 1/8 lesz.

c) *(2 pont)* II/7, akár autoszómásnak, akár X kromoszómásnak tekintjük a betegséget, biztos, hogy hordozó. X kromoszómás öröklődés esetén egy lánygyermeknél ½ a valószínűsége, hogy beteg lesz, autoszómás esetben függetlenül a nemtől ½ a valószínűség.

d) *(1 pont)* X kromoszómás öröklődés esetén csak az egészséges férfiakról mondhatjuk el, hogy egész biztosan nem hordozók. 8 ilyen van. Autoszómás öröklődés esetén nincsenek ilyen személyek.

e) *(2 pont)* X kromoszóma esetén: I/6, II/4, II/7, III/5
Autoszómás esetben: I/5, I/6, II/2, II/5, II/6, II/4, II/7, III/5, III/7

f) *(2 pont)* X kromoszómás öröklődés esetén az apa mindenképpen beteg, hiszen csak ebben az esetben adhatott hibás X allélt a lányának. Ha autoszómás az öröklődés, az apának akkor is mindenképp hordoznia kell a beteg allélt, tehát vagy hordozó, vagy homozigóta recesszív, és beteg.